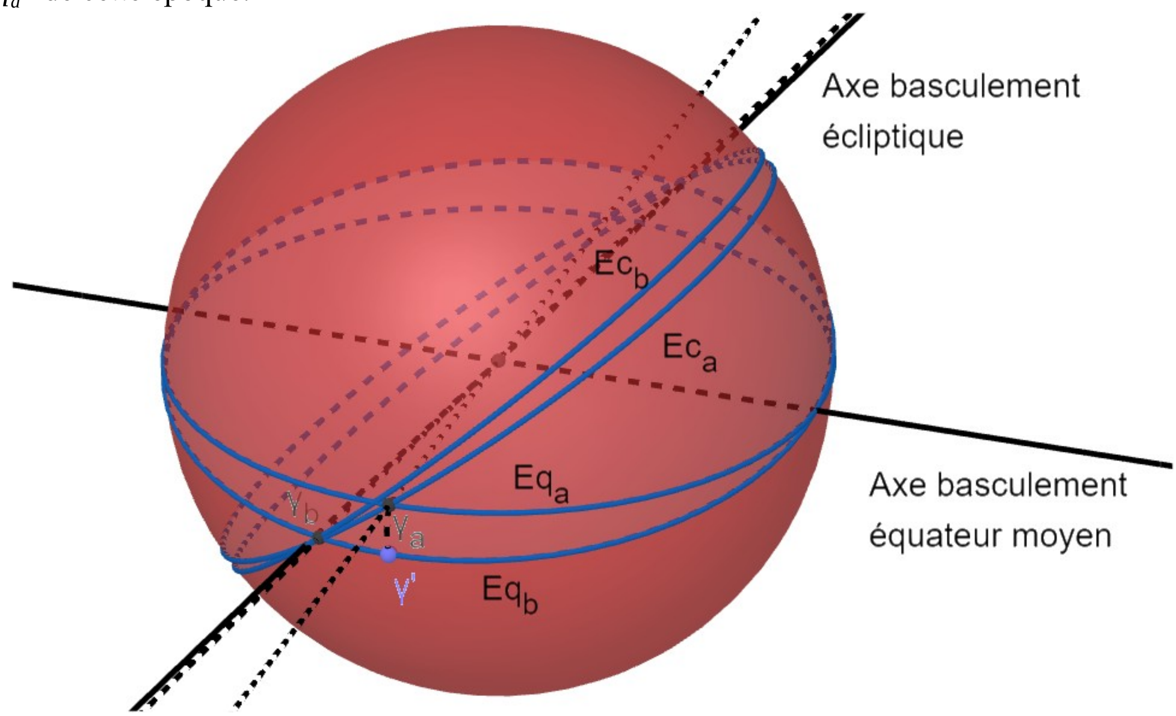
L'ÉQUATION DU TEMPS

Michel Llibre - Club d'astronomie de Quint-Fontsegrives

La précession des équinoxes

Lors de l'éclipse de Lune du 20 Novembre 129 av. J.C (-128) **Hipparque de Nicée** (Iznir en Turquie) mesure la longitude céleste de Spica et la compare à celle figurant dans le catalogue d'étoiles dressé 150 ans plus tôt par **Timocharis** et **Aristylle**. Il constate un écart d'environ 2°. Il en déduit un déplacement de l'origine des coordonnées qu'il estime à 1° par siècle (au lieu de 1,38°). Il a découvert la précession des équinoxes.

La figure ci-dessous montre le point vernal γ_a de l'axe des équinoxes, à une certaine époque T_a. Sur la sphère céleste il est à l'intersection de l'écliptique Ec_a et de l'équateur moyen Eq_a de cette époque.



Dans le mouvement moyen causé par la précession des équinoxes, le point vernal de γ_a se déplace en γ_b , comme représenté sur la figure ci-dessus.

En 1748, en mesurant la parallaxe d'Eltanin (γ du Dragon), c'est-à-dire sa variation de position angulaire due au déplacement de la Terre d'un coté à l'autre du Soleil, **James Bradley** découvre, entre autres, un déplacement qui n'est pas dû à la parallaxe, mais à une variation de la direction de l'axe de rotation de la Terre appelée mouvement de nutation. Ce mouvement d'oscillation a une période de 18.6 ans et une amplitude de ±9" en obliquité et ±17" en précession. Quand on prend en compte ce mouvement, on qualifie l'équateur et le point gamma associés de vrais et les coordonnées associées d'apparentes.

Effet du mouvement moyen de précession

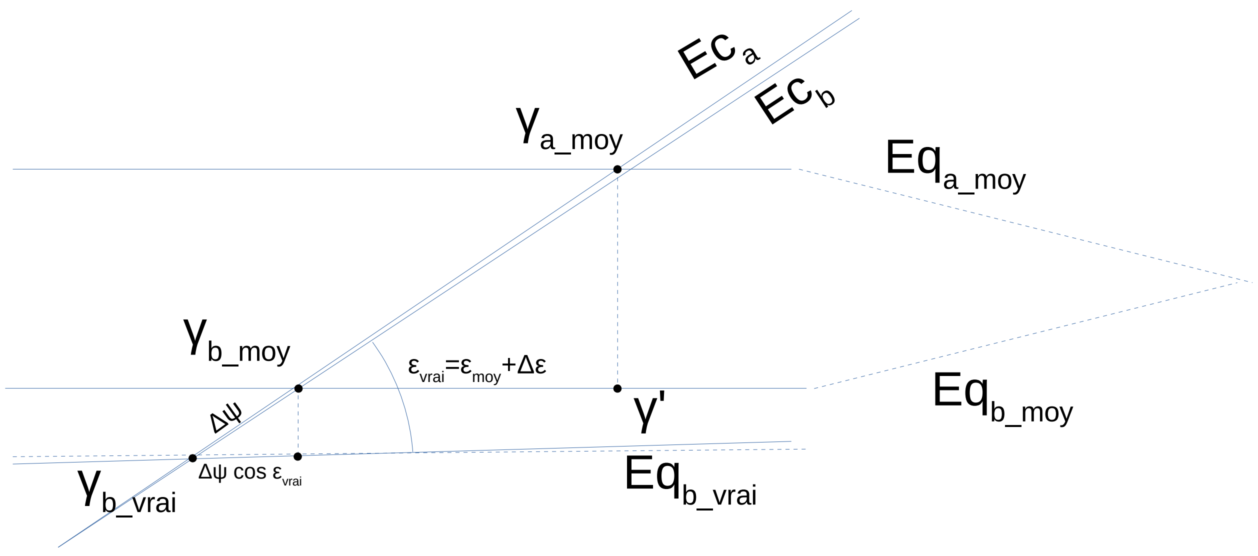
Le mouvement de précession des équinoxes et dû à une rotation lente au cours du temps du plan de l'équateur autour d'un axe qui est dans son plan (pourquoi dans son plan, parce que la composante perpendiculaire est inobservable car elle est intégrée à la rotation diurne de la Terre), avec une direction approximativement perperndiculaire à l'axe des équinoxes. Cette rotation est responsable du déplacement $\gamma_a \gamma'$ qui vaut environ 20" par an.
L'écliptique bascule également autour d'un axe qui est proche de la ligne des équinoxes (5° d'écart environ) d'un angle qui fait environ 0.47" par an, mais la proximité du point de rotation est si proche du point vernal que cette rotation peut être négligée.

Le nouveau point vernal γ_b , intersection de l'équateur Eq_b et de l'écliptique Ec_b est reculé en précession de 46.1" par rapport à γ' . Le long de l'écliptique le recul $\gamma_a \gamma_b$ est ainsi égal à : $\gamma_a \gamma_b = \sqrt{(46.1^2 + 20^2)}$ = 50.2" par an, soit environ 360° en 26000 ans.

Effet du mouvement de nutation

Comme mentionné ci-dessus, les point vernaux considérés sont des point vernaux moyens. Du fait de l'oscillation de Bradley, l'axe de rotation de la Terre subit une première variation angulaire $\Delta\varepsilon$ de son obliquité, comptée positive dans le sens rétrograde afin d'être ajoutée à ε_{moy} , qui peut atteindre ±9" :

$$\boxed{\varepsilon_{vrai} = \varepsilon_{moy} + \Delta\varepsilon}$$



Sur la figure ci-dessus, c'est la distance $\gamma_{\text{b\_moy}} \gamma_{\text{a\_moy}}$ qui vaut environ 50.2" par an. L'équateur vrai oscille de part et d'autre de l'équateur moyen de la quantité $\Delta\psi$ en longitude écliptique. Il en résulte la relation suivante entre longitudes écliptiques apparente et moyenne d'un astre :

$$\boxed{\psi_{app} = \psi_{moy} + \Delta\psi}$$

La longitude écliptique moyenne ψ_{moy} mesure l'arc $\gamma_{moy} E_{cli}$ entre le point origine γ_{moy} et une position E_{cli} le long de l'écliptique, et la longitude apparente ψ_{app} mesure l'arc $\gamma_{vrai} E_{cli}$ entre le point origine γ_{vrai} et cette même position.
Au niveau équatorial, cette variation produit un déplacement du point vernal en ***déclinaison*** δ de la quantité $\Delta\psi \sin\varepsilon$ (déplacement vertical sur la figure) et en ***ascension droite*** α de la quantité $\Delta\psi \cos\varepsilon$. Ces deux quantités interviennent dans la distinction entre coordonnées

équatoriales de la date (moyennes mais ce n'est pas précisé) d'un astre et ses coordonnées apparentes :

$$\begin{aligned}\alpha_{app} &= \alpha+\Delta\psi(\cos\varepsilon+\sin\alpha\tan\delta\sin\varepsilon)-\Delta\varepsilon\cos\alpha\tan\delta\\ \delta_{app} &= \delta+\Delta\psi\sin\varepsilon\cos\alpha+\Delta\varepsilon\sin\alpha\end{aligned}$$

L'heure sidérale

L'heure sidérale *Hs*, également appelée temps sidéral, mesure la rotation de la Terre par rapport au point vernal. Cette rotation est mesurée par l'angle horaire dièdre entre le méridien du lieu considéré, Greenwich pour l'heure sidérale de Greenwich ou méridien local pour l'heure sidérale locale, et le méridien contenant le point vernal. Suivant que l'on considère le point vernal moyen ou le point vernal vrai on mesure l'heure sidérale moyenne ou l'heure sidérale apparentte. On a ainsi :

$$\boxed{Hs_{app}=Hs_{moy}+\Delta\psi\cos\varepsilon}$$

Ascension droite et angle horaire

L'ascension droite d'un astre est l'angle entre le méridien passant par le point vernal et le méridien passant par l'astre. C'est un angle mesuré le long de l'équateur de la sphère céleste.

Si ψ est la longitude écliptique du soleil vrai, son ascension droite est donnée par :

$$\alpha = \arctan(\tan\psi \;\; \cos\varepsilon)$$

L'angle horaire *Ah* d'un astre est l'angle entre le méridien passant par l'astre avec le méridien du lieu. Il est mesuré le long de l'équateur de la sphère céleste.
On a ainsi la realtion suivante avec le temps sidéral :

$$\boxed{Ah=Hs-\alpha}$$

Heure solaire

Le temps solaire ou heure ou solaire est l'angle horaire du Soleil plus 12h, afin que vers midi le heure solaire soit voisine de 12h et non pas de 0h.

$$\boxed{T_{Sol}=Ah_{Sol}+12\,h}$$

ou encore :

$$T_{Sol}=Hs-\alpha_{Sol}+12\,\mathrm{h} \quad .$$

Position du Soleil vrai

La loi des aires de Kepler fait intervenir l'aire directement proportionelle au temps TU (en première approximation). L'anomalie moyenne M est l'aire réduite (ramenée à 360° ou 2π radians pour l'aire totale de l'ellipse). M est nul lorsque le barycentre Terre-Lune passe au périhélie, par exemple le 4 janvier 2000 à 0h11m09s TU. Le barycentre repasse au périhélie au bout d'une année anomalistique AN_{ano} valant approximativement :

$$AN_{ano}=365.259636 \quad \text{jours}$$

Le mouvement moyen est ainsi donné par :

$$\Omega_{ano}=\frac{360\,°}{AN_{ano}} \quad \text{°/jour solaire moyen.}$$

quand on exprimel'anomalie en degrés. Calculons la valeur M_0 de l'anomalie moyenne pour J2000 (le 1/1/2000 à 12h) soit $dj=2.50774$ jours avant le passage au périhélie. On a :

$$M_0 = -\Omega_{ano} dj = -2.472°$$
$$M_0 = 357.528°$$

On a ainsi l'approximation suivante pour l'anomalie moyenne :

$$M = M_0 + \Omega_{ano} d_{TU}$$

où d_{TU} est le nombre de jours écoulés depuis J2000. Cette relation devenant de plus en plus imprécise avec le temps, il faut l'actualiser en recalculant M_0 pour une nouvelle origine des éphémérides, ou ajouter des termes temporels correctifs de degré supérieur à 1.

L'angle polaire décrit par le Soleil (anomalie vrai *v*) se calcule à partir de l'anomalie moyenne M par une équation appelée équation du centre :

$$v = M + C(M)$$

$C(M)$ est nul lorsque le barycentre Terre-Lune est sur la ligne des apsides, c'est-à-dire à l'aphélie ou au périhélie. En première approximation $C(M)$ est donné **en radians** par :

$$C(M) = 2e\left(1 - \frac{e^2}{8}\right)\sin M + ...$$

où *e* =1/59.85 est l'excentricité de l'orbite.

ATTENTION : Lors des opérations sur les angles faire attentioin de convertir tout dans la même unité : 1 jour équivalent à 1 tour équivalent à 24h équivalent à 360° équivalent à 2π radians. Ainsi dans l'expression $v = M + C(M)$ si M est exprimé en degrés, le facteur de $\sin(M)$ devient $\frac{2}{59.85}\left(1 - \frac{1}{8 \times 59.85 \times 59.85}\right)\frac{180}{\pi} = 1.91°$ soit :

$$C(M) \simeq 1.91°\sin(M)$$

Pour calculer la longitude écliptique du Soleil vrai, il faut situer le périgée du Soleil par rapport au point vernal. Sa longitude écliptique est donnée par :

$$\varpi = 282.937° + 1.72°\frac{d_{TU}}{36525}$$

où le deuxième terme prend en compte la lente précession de ce périgée.

Il en résulte que la longitude écliptique du Soleil vrai pour une certaine date TU est donnée par :

$$L_{Sol} = \varpi + v \simeq 280.466° + \left(\Omega_{ano} + \frac{1.72}{36525}\right) d_{TU} + C(M_0 + \Omega_{ano} d_{TU})$$

avec d_{TU} exprimé en jours décimaux depuis J2000 et Ω_{ano} exprimé en degrés par jour.

A l'instant d_{eqO} de l'équinoxe de printemps la longitude écliptique du soleil vrai est nulle (modulo 360°):

$$0° \simeq 280.466° + \left(\Omega_{ano} + \frac{1.72}{36525}\right) d_{eq0\,TU} + C(M_0 + \Omega_{ano} d_{eq0})$$

et un année tropique après, c'est la même chose (modulo 360°) :

$$0° \simeq 280.466° + (\Omega_{ano} + \frac{1.72}{36525})(d_{eq0TU} + AN_{trop}) + C(M_0 + \Omega_{ano}(d_{eq0} + AN_{trop}))$$

En faisant la différence de ces deux équations, il vient (modulo 360°) :

$$0° \simeq (\Omega_{ano} + \frac{1.72}{36525}) AN_{trop} + 1.91°[\sin(M_0 + \Omega_{ano}(d_{eq0} + AN_{trop})) - \sin(M_0 + \Omega_{ano} d_{eq0})]$$

Or $AN_{trop} = AN_{ano} - 0.01745$ jour, d'où $\Omega_{ano} \times AN_{tro} = \frac{-360 \times 0.01745}{365.2596} = -0.0172°$ ce qui fait que $(\Omega_{ano} + \frac{1.72}{36525}) AN_{trop} \simeq 0°$ à 10^{-3} degré près (le niveau de nos approximations). Il reste la différence des termes correctifs de l'équation du centre qui peut s'approximer par $1.91° \times 2 \sin(\frac{-0.0172°}{2}) \cos(M_0 + \Omega d_{eq0})$ soit $0.0006° \cos(M_0 + \Omega \times d_{eq0})$ qui est aussi nul au niveau de nos approximations. On peut donc faire l'approximation :

$$\Omega_{trop} \simeq \Omega_{ano} + \frac{1.72}{36525}$$

L'équation donnant la longitude écliptique du soleil vrai se simplifie alors :

$$\boxed{L \simeq 280.466° + \Omega_{trop} d_{TU} + 1.91° \sin(M_0 + \Omega_{ano} d_{TU})}$$

où d_{TU} est le nombre de jours décimaux écoulés depuis J2000

Les coordonnées équatoriales du soleil vrai s'obtiennent par un changement de coordonnées classique écliptiques vers équatoriales qui est simplifié ici car la latitude écliptique du Soleil est nulle :

$$\begin{aligned} \alpha_{SolV} &= \operatorname{atan2}(\sin L \cos \varepsilon, \cos L) \\ \delta_{SolV} &= \arcsin(\sin L \sin \varepsilon) \end{aligned}$$

Les soleils moyens

Le soleil écliptique moyen

Le soleil écliptique moyen est un soleil qui parcours l'écliptique à vitesse constante, débarrassé de l'équation du centre. Sa longitude écliptique est ainsi donnée par :

$$L_{SolM} \simeq 280.466° + \Omega_{tro} d_{TU}$$

la longitude écliptique du soleil vrai est alors donnée par :

$$L_{SolV} = L_{SolM} + C(t)$$

avec :

$$C(t) \simeq 1.91° \sin(M_0 + \Omega_{ano} d_{TU})$$

Le soleil équatorial moyen

Le soleil équatorial moyen est un soleil qui parcours l'équateur à vitesse constante Ω_{tro} . Comme son ascension droite s'annule au passage par le point gamma moyen, en même temps que s'annule la longitude écliptique du soleil écliptique moyen, et que ces deux soleils ont la même vitesse Ω_{tro} , l'équation de l'ascension droite du soleil équatorial moyen est identique à l'équation de la longitude écliptique du soleil écliptique moyen :

$$\alpha_{SolM} \equiv L_{SolM}$$

Après l'équinoxe de printemps, le soleil écliptique moyen monte à $\varepsilon = 23°$ le long de l'écliptique. Sa projection sur l'équateur prend du retard sur le soleil équatorial moyen, retard qu'il rattrape pour s'annuler au solstice d'été, puis sa projection prend de l'avance sur le soleil équatorial moyen, avance qui s'annule à l'équinoxe d'automne. Ensuite, il prend à nouveau du retard... Ce phénomène d'avance retard de période de 6 mois est appelé la réduction à l'équateur. Nous la détaillerons ci-après.

L'équation du temps

On appelle équation du temps la différence en l'angle horaire du Soleil moyen apparent et l'angle horaire du Soleil vrai :

$$E(t) = Ah_{SolM} - Ah_{SolV}$$

Ces angles horaires sont donnés par :

$$\begin{array}{rcl} Ah_{SolM} & = & Hs_{moy} - \alpha_{SolM} \; = \; Hs_{app} - \Delta\psi\cos\varepsilon - \alpha_{SolM} \\ Ah_{SolV} & = & Hs_{app} - \alpha_{SolV} \end{array}$$

Il en résulte que :

$$E(t) = \alpha_{SolV} - \alpha_{SolM} - \Delta\psi\cos\varepsilon$$

Remarque : On aurait pu passer par l'intermédiaire de Hs_{moy}, et arriver au même résultat.

Pour manipuler des expressions moins lourdes débarrassées de $\Delta\psi\cos\varepsilon$, considérons $E'(t) = E(t) + \Delta\psi\cos\varepsilon$. C'est l'expression traditionnellement présentée (qui ne prend pas en compte la différence entre les points vernaux vrai et moyen) qui s'écrit simplement :

$$E'(t) = \alpha_{SolV} - \alpha_{SolM}$$

En utilisant l'équivalence $\alpha_{SolM} = L_{SolM}$ on peut écrire :

$$\begin{array}{rcl} E'(t) & = & \alpha_{SolV} \; - \; L_{SolM} \\ E'(t) & = & (\alpha_{SolV} - L_{SolV}) \; + \; (L_{SolV} - L_{SolM}) \end{array}$$

On reconnait $L_{SolV} - L_{SolM} \; = \; C(t)$. En posant :

$$R'(t) = \alpha_{SolV} - L_{SolV}$$

il vient :

$$E'(t) = R'(t) + C(t)$$

avec :

$$R'(t) = \mathrm{atan2}(\sin L_{SolV}\cos\varepsilon, \cos L_{SolV}) - L_{SolV}$$

$R'(t)$ est appelé **la réduction à l'équateur**. Elle exprime l'écart angulaire produit par la projection de la longitude écliptique du soleil vrai sur l'équateur pour la transformer en ascension droite. Elle a l'allure d'une sinusoïde qui s'annule aux équinoxes et aux solstices.

Résumé du calcul : Pour le calcul de E(t), on peut utiliser les expressions suivantes :

$$E(t) = \mathrm{atan2}(\sin L_{SolV} \cos \varepsilon, \cos L_{SolV}) - L_{SolM} - \Delta\psi \cos \varepsilon$$

avec :

$$\begin{aligned} L_{SolV} &= L_{SolM} + C(t) \\ L_{SolM} &\simeq 280.466° + \Omega_{trop} d_{TU} \\ C(t) &\simeq 1.91° \sin(357.528° + \Omega_{ano} d_{TU}) \end{aligned}$$