

Introduction aux codes astronomiques

Michel Llibre

2009-2019

Sommaire

1	Introduction	4
2	Les temps	6
2.1	Temps des éphémérides, dynamique, terrestre	6
2.2	Temps universel	7
2.2.1	Soleil moyen et Soleil vrai	7
2.2.2	Les temps universels	9
2.2.3	Passage du temps universel au temps des éphémérides	11
2.3	Jours juliens	12
2.4	Catalogues fondamentaux et époques standards	12
2.5	Temps universel ou temps des éphémérides ?	13
3	Directions et repères fixes	14
3.1	Nos notations pour les matrices de rotation	14
3.1.1	Matrice de rotation élémentaires	14
3.1.2	Opérateur rotation	15
3.1.3	Changement de base d'un vecteur	16
3.1.4	Changement de base d'un opérateur	16
3.1.5	Rotations successives	17
3.1.6	Matrice de passage	17
3.1.7	Changement de base successifs	18
3.1.8	Remarques	19
3.1.8.1	Commutativité des matrices de micro-rotation	19
3.1.8.2	Vocabulaire	19
3.2	Généralités sur les plans et directions de référence	19
3.2.1	Les mouvements des directions et plans	20
3.2.1.1	La précession	20
3.2.1.2	La nutation	20
3.2.1.3	Les mouvements du pôle nord instantané	20
3.2.2	Les références moyennes et vraies	20
3.3	Les principales coordonnées utilisées en astronomie	21
3.3.1	Les coordonnées équatoriales	21
3.3.2	Les coordonnées écliptiques	22
3.3.2.1	L'obliquité de l'écliptique	23
3.3.2.2	Coordonnées écliptiques versus équatoriales	24
3.3.2.3	Calcul de la vitesse de variation des coordonnées écliptiques d'une étoile.	25
3.3.3	Les coordonnées galactiques	25
3.4	Correction de précession - Changements d'époque de référence pour des coordonnées moyennes	26
3.4.1	Modélisation des mouvements des éléments de référence	27
3.4.1.1	Mouvement de l'écliptique moyen :	27
3.4.1.2	Mouvement de l'équateur moyen	28
3.4.2	Changement d'époque de référence pour des coordonnées équatoriales moyennes	28
3.4.3	Changement d'époque de référence pour les coordonnées écliptiques moyennes	30
3.4.4	Correction directe approchée des coordonnées équatoriales moyennes d'une étoile	31
3.5	Correction de nutation - Les coordonnées vraies	32
3.5.1	Modèles du mouvement de nutation	32
3.5.1.1	Modèle approché	33
3.5.1.2	Modèle précis	33
3.5.2	Conversion des coordonnées écliptiques moyennes en vraies	34

3.5.3	Conversion des coordonnées équatoriales moyennes en vraies	35
4	Localisation des étoiles	37
4.1	Mouvement propre des étoiles	37
4.2	L'aberration annuelle des étoiles	38
4.2.1	Correction des coordonnées écliptiques	38
4.2.2	Correction des coordonnées équatoriales	41
5	Repères terrestres, Temps sidéral et Temps solaire	43
5.1	Sphéroïde et latitudes terrestres	43
5.1.1	Passage des coordonnées géodésiques aux coordonnées cartésiennes	43
5.1.2	Passage des coordonnées cartésiennes aux coordonnées géodésiques	45
5.2	Repère de Greenwich	46
5.3	Coordonnées géographiques	46
5.4	Repère local - Coordonnées horizontales d'un astre	46
5.5	Réfraction atmosphérique	48
5.6	Angle horaire - Coordonnées horaires équatoriales d'un astre	49
5.7	Passage entre coordonnées horaires équatoriales et coordonnées horizontales	50
5.8	Temps sidéral - Orientation de la Terre	51
5.8.1	Temps sidéral moyen de Greenwich	52
5.8.2	Temps sidéral apparent	53
5.9	Lever et coucher d'un astre	53
5.9.1	Instant de passage au méridien (transit)	53
5.9.2	Instants de lever et coucher	54
5.9.3	Crépuscules civil, nautique, astronomique	56
6	Modélisation des orbites elliptiques	57
6.1	Géométrie de l'ellipse	57
6.2	L'équation de Kepler	58
6.3	Vitesse du corps	59
6.4	Étapes du calcul de la position dans le plan de l'ellipse	60
6.5	Inversion de la position sur orbite	60
7	Planètes, Soleil, Lune	61
7.1	Position des planètes	61
7.1.1	Les éléments orbitaux	61
7.1.1.1	Caractéristiques orbitales approchées	62
7.1.1.2	Les éléments orbitaux des planètes	62
7.1.2	Position des planètes à un instant donné	63
7.1.3	Tables de précision moyenne	63
7.1.4	Positions des planètes par la théorie VSOP87	63
7.1.5	Position approximative de Pluton	68
7.2	Position du Soleil	69
7.2.1	Années anomalistiques, sidérales et tropiques, passage au périhélie	69
7.2.2	Trajectoire du Soleil (ou du barycentre Terre-Lune)	69
7.2.3	Coordonnées écliptiques du Soleil (ou du barycentre Terre-Lune)	71
7.2.4	Coordonnées équatoriales du Soleil	71
7.3	La lune	72
7.3.1	Position de la Lune	72
7.3.2	Phases et angle Parallactique de la Lune	74
7.3.2.1	Élongation de la Lune par rapport au Soleil	74
7.3.2.2	Phases de la Lune	75
7.3.2.3	Angle parallactique	75
7.3.2.4	Inclinaison du croissant	77
7.3.3	Orientation de la Lune (ou d'une planète)	77
7.4	Correction aberration et effet temps-lumière	79
7.5	Correction de la parallaxe diurne	80
7.5.1	Calcul exact en cartésien	80
7.5.2	Corrections au premier ordre	81

8 Heures solaires et heures sidérales	82
8.1 L'équation du temps	82
8.2 Heure sidérale et heure solaire aux équinoxes	84
9 Satellites artificiels	85
9.1 Éléments orbitaux d'un satellite terrestre	85
9.2 Principe du calcul de la position	86
9.3 Modèle SGP. Calcul à partir des données des TLE	86
9.4 Les TLE	87
9.4.1 Les données	87
9.4.2 Le modèle SGP	88
9.5 Inversion de la position sur orbite	90
9.6 Orbites particulières	91
9.7 Éclairement d'un satellite terrestre	92
9.7.1 Approximation Soleil ponctuel à l'infini, Terre sphérique	92
9.7.2 Prise en compte réfraction et ellipticité	92
9.7.3 Prise en compte de la taille du Soleil	93
9.8 Intervalles de visibilité d'un satellite	95
9.8.1 Paramètres de la configuration observateur - satellite	95
9.8.2 Calcul d'un intervalle de visibilité d'un satellite par une station	98
9.8.2.1 Calcul du passage par la distance zénithale géocentrique minimale	98
9.8.2.2 Calcul des entrée et sortie dans la zone de visibilité	99
10 Codes GNU Octave	101

Chapitre 1

Introduction

A l'origine ce document a été écrit pour documenter un programme de simulation numérique du mouvement des satellites artificiels de la Terre. Le programme a ensuite été étendu à la simulation du mouvement des étoiles et des planètes et le document a été complété afin de constituer un ouvrage d'introduction expliquant les calculs mis en œuvre dans ce genre de simulation.

Ce document a été écrit par un ingénieur autodidacte en astronomie et il s'adresse à des astronomes débutants désirant une approche plus simple et plus explicative que les ouvrages qui ont servi de référence à l'auteur. La précision des algorithmes est suffisante pour une utilisation pour des observations effectuées par des astronomes amateurs, typiquement de l'ordre de la seconde d'angle. Pour une précision supérieure, les phénomènes relativistes doivent être pris en compte, ce qui n'est pas fait dans ce document.

Précisons que l'aspect dynamique des mouvements n'est pas pris en compte. Ceux-ci sont simplement décrits par des formules analytiques déterministes en fonction du temps.

L'ouvrage fondamental de Jean Meeus [5] est à l'origine des algorithmes concernant la position des planètes, la position et l'orientation de la Terre et la position et l'orientation de la Lune. Les explications et justifications des formules de changement de repère de référence proviennent des ouvrages du Bureau des Longitudes [6, 8]. Pour les satellites artificiels nous utilisons des algorithmes issus des modèles SGP (simplified perturbations models) alimentés par les données publiées par le NORAD (North American Aerospace Defense Command : <https://www.celestrak.com/NORAD/elements/>).

Après l'introduction, le deuxième chapitre est consacré à définir les différents temps qui sont utilisés pour calculer les positions ou directions des objets spatiaux.

Le troisième chapitre est consacré à la définition des divers repères d'orientation quasi fixe qui sont utilisés pour évaluer ces positions ou directions, et aux relations qui existent entre ces divers repères.

Le quatrième chapitre est consacré aux directions des étoiles.

Le cinquième chapitre est consacré à l'orientation de la Terre.

Le sixième chapitre décrit les caractéristiques des orbites elliptiques.

Le septième chapitre est consacré aux algorithmes utilisés pour calculer les positions des planètes, du Soleil et de la Lune.

Le huitième chapitre revient sur la définition des heures solaires et sidérales.

Le neuvième chapitre est consacré aux algorithmes utilisés pour calculer les positions des satellites artificiels de la Terre.

Le dernier chapitre donne des indications supplémentaires sur les sources en langage Octave/Matlab associées à ce document.

Nous attirons l'attention du lecteur sur l'importance des adjectifs *moyens* et *vrais*, qui peuvent passer inaperçu lors d'une lecture rapide. Le qualificatif *moyen* est en particulier utilisé pour différencier les coordonnées célestes *moyennes*, *vraies* et *apparentes*. Très grossièrement, les coordonnées *moyennes* sont relatives à des axes de référence bâtis à partir de la direction d'un axe de rotation de la Terre *moyen*, ne subissant pas l'oscillation de Bradley (voir chapitre 3.5). Pour les coordonnées dites *vraies* cette oscillation est prise en compte. Pour les coordonnées dites *apparentes*, on prend, en outre, en compte le fait que l'observateur est sur Terre et non pas au centre du Soleil.

Dans les mouvements orbitaux, le corps qui parcourt l'ellipse est repéré par rapport au foyer et à la ligne des apsides par un angle appelé l'anomalie *vraie* qui est calculé par l'intermédiaire d'un pseudo-angle qui varie linéairement appelé l'anomalie *moyenne*. On appelle également longitude *moyenne* la longitude d'un astre fictif qui se déplacerait avec une vitesse constante, au lieu de se déplacer avec une vitesse variable à cause de l'ellipticité de son orbite. De plus ce pseudo-angle comporte parfois une composante dans un plan de référence et une autre dans le plan de l'orbite.

Enfin, notre heure civile est basée sur un Soleil *moyen* fictif qui parcourt *l'équateur* avec une vitesse de défilement *constante*, alors que le Soleil réel parcourt *l'écliptique* avec une vitesse de défilement *variable* (voir 2.2.1 et 8.1).

En conséquence, il faut faire très attention à ces qualificatifs anodins qui discriminent en fait des réalités bien différentes.

Chapitre 2

Les temps

Dans ce chapitre nous présentons les relations qui existent entre les deux temps qui sont utilisés dans l'étude des événements spatiaux : le temps civil (successivement nommés GMT , UT , UT_c ...) qui sert de repère pour les événements de notre vie courante et qui est lié à l'angle de rotation de la Terre, et le temps mathématique (successivement nommé temps des éphémérides TE , temps dynamique terrestre TDT , temps terrestre TT) qui intervient dans les lois cinématiques ou dynamiques qui régissent les trajectoires des corps spatiaux.

Au chapitre 5.8 nous présenterons le temps sidéral qui, comme le temps civil est lié à la rotation de la Terre, mais alors que le temps civil mesure cette rotation par rapport à la direction du Soleil (fictif ou réel comme nous verrons plus loin), le temps sidéral mesure cette rotation par rapport à la direction du point vernal (point γ ou ligne équinoxe de printemps, voir définition section 3.2). Le temps stellaire qui mesurerait la rotation de la Terre par rapport aux étoiles et qui est différent du temps sidéral à cause de la précession rétrograde de la ligne des équinoxes (voir section 3.2.1.1), n'est pas utilisé.

Le compte des jours est une notion de l'écoulement du temps qui remonte aux débuts de l'humanité. La mesure plus fine de son écoulement est sûrement antérieure aux premiers documents historiques écrits par les babyloniens et les égyptiens, mais à titre d'exemple, le parallèle entre l'écoulement du temps et les déplacements à vitesse régulière à pied a conduit les babyloniens à définir les unités de temps suivantes : Le jour était divisé en 12 Danna (deux heures actuelles). Un Danna était également le temps qui s'écoulait pendant une marche d'environ 10.8 km. Le Danna était divisé en 30 Ush et le Ush correspondait à 360 m de marche. Le Ush était divisé en 60 Nindan. Un Nindan correspondait à 6m de marche.

Le décompte de l'écoulement de notre temps civil est lié à la rotation journalière apparente du Soleil autour de la Terre. Il en résulte une équivalence entre les mesures temporelles et les mesures angulaires des rotations. Ainsi ces dernières peuvent être exprimées en radians ou en degrés mais aussi en heures, minutes et secondes. Ainsi 2π radians, 360° , 24 heures, 1440 minutes de temps et 84600 secondes de temps sont des quantités équivalentes. De même un arc mesurant 1 heure est égal un arc mesurant 15° , et un arc mesurant 1° est égal à un arc mesurant $3600''$ de degré ou à un arc mesurant 240 secondes d'heure !!! On peut donc combiner des angles et des durées à condition de tout exprimer dans la même unité. Mais attention, deux pièges sont à éviter :

- Certains angles sont comptés dans le sens trigonométrique indirect comme les angles horaires.
- Il faut bien faire la différence entre les minutes et secondes d'heure notées m (ou mn) et s avec les minutes et secondes de degré notées ' et ". En effet $1mn \equiv 15'$ et $1s \equiv 15''$. Généralement on qualifie les minutes et secondes de temps ou d'arc, mais il serait plus judicieux de suivre l'exemple de Jean Meeus en les qualifiant de minutes et secondes d'heure ou de degré. La seconde de degré est parfois appelée l'arcseconde.

Le temps utilisé dans les formules issues de la loi de Newton pour décrire les déplacements des astres est un *temps continu, uniforme, linéaire* indépendant du lieu (en négligeant les effets relativistes) et de l'époque, alors que le temps utilisé dans la vie civile pour dater les événements est discontinu (corrections d'irrégularités, heures d'été, suppression de jours dans le calendrier, etc.). par ailleurs il dépend de la longitude du lieu et de l'époque. Ce chapitre est consacré à préciser les relations qui lient ces deux temps.

2.1 Temps des éphémérides, dynamique, terrestre

Le temps continu utilisé par les astronomes a longtemps été lié à la rotation diurne de la Terre, mais ce temps a du être abandonné par suite de la mise en évidence des nombreuses irrégularités de cette rotation. Les astronomes ont alors introduit un temps continu et régulier appelé temps des éphémérides, basé non pas sur la rotation de la Terre sur elle-même, mais sur le déplacement de la Terre dans sa course autour du Soleil (sa révolution).

En 1951 le **temps de éphémérides** TE a été défini à partir de l'expression numérique de la longitude géométrique moyenne¹ du Soleil. Il a servi de base pour définir la seconde et a été utilisé pour calculer les éphémérides des planètes et satellites jusqu'en 1983.

Le **temps atomique international** TAI élaboré en 1955 par les physiciens au moyen d'horloges au Césium s'est peu à peu imposé comme le temps continu linéaire uniforme de toutes les disciplines de la physique. Malencontreusement, il a été ajusté le 1^{er} janvier 1958 à 0h à la valeur du temps universel $UT1$ au lieu de l'ajuster à celle du TE , ce qui fait que ces deux échelles de temps linéaires et parallèles diffèrent d'une constante :

$$TE = TAI + 32.184s$$

En 1976 la relativité est prise en compte. Le temps n'est plus absolu, mais est lié au repère utilisé. Deux nouveaux temps sont introduits : le **temps dynamique terrestre** TDT pour décrire les déplacements apparents des astres dans un *système géocentrique*, et le **temps dynamique barycentrique** TDB pour décrire les déplacements des astres dans un système dont *l'origine est le barycentre du système solaire*. Ils sont séparés par des variations inférieures à 1.7 millisecondes. Ces deux temps permettaient de prolonger le TE .

En 1991 ces deux temps dynamiques ont été remplacés à leur tour, respectivement par le **temps coordonné géocentrique** TCG et par le **temps coordonné barycentrique** TCB , avec une nouvelle définition relativiste. Par ailleurs d'autres temps coordonnés relativistes ont été introduits pour d'autres centres de masse ($TC - J$ temps coordonné jovicentrique et $TC - S$ temps coordonné saturnocentrique par exemple). Ces temps relativistes ne sont pas liés au TAI . Ils varient donc par rapport au TE .

Toujours en 1991, pour décrire les déplacements apparents des astres dans un système géocentrique, en continuité avec le TE , le **temps terrestre** TT a été introduit *en remplacement* du TDT (remplacement effectif en 2000). On a donc :

$$TT = TE = TAI + 32.184s$$

en avance de 32.184s sur le temps atomique international.

Les autres temps sont très proche du TT , par exemple :

$$TCG = TT + 6.969290134 \times 10^{-10}(JD - J1977) \times 86400$$

où JJ est le jour julien de la date courante (voir définition paragraphe 2.3) et où $J1977 = 2443144.5$ est le jour julien du 1^{er} janvier 1977 à 0h. L'écart entre TT et TCG atteint 1s au bout de 45 ans.

Remarque : Le **temps GPS** est un temps atomique mais qui a été synchronisé sur le temps UTC (voir plus loin) le 6 janvier 1980 époque à laquelle le TAI était en avance de 19 secondes sur le temps UTC , ce qui fait que :

$$T_{GPS} = TAI - 19s = TT - 41.184s$$

Le temps GPS est en retard de 19s sur le temps atomique international et en retard de 41.184s sur le temps des éphémérides.

Dans ce qui suit, pour parler de ce temps qui intervient dans le calcul de la position des planètes nous utiliserons le terme **temps des éphémérides** de préférence au terme **temps terrestre** car ce dernier terme nous paraît trop général et difficile à situer pour un lecteur néophyte. Il prête à confusion car terrestre fait plutôt penser à un temps concret et donc au temps civil plutôt qu'au temps abstrait qu'il est et qui est utilisé dans les formules mathématiques qui permettent de calculer la position de la Lune, du Soleil et des planètes.

2.2 Temps universel

Notre **temps civil** est lié à l'orientation de la Terre par rapport à un Soleil moyen équatorial précisé ci-après, afin que la succession des jours civils coïncide avec celle des jours solaires, c'est-à-dire afin qu'il soit midi aux environs de 12 h malgré toutes les variations liées à la course du Soleil et aux perturbations et ralentissements de rotation pouvant subvenir. Ce temps est donc irrégulier.

2.2.1 Soleil moyen et Soleil vrai

Le jour solaire *vrai* est l'intervalle de temps entre deux passages successifs du Soleil par le méridien du lieu. Au XVII^e siècle les premières horloges précises ont montré qu'il y avait une variation de la durée de ces jours. Sur une année, la différence entre le jour le plus court et le jour le plus long atteint environ 51s (de 23h59mn30s à 24h00mn21s). Cette différence de durée des jours solaires vrai est due à la forme elliptique et à l'inclinaison sur l'écliptique de la trajectoire du Soleil. Notre temps civil actuel est basé sur une durée constante du jour *solaire moyen* qui est égale à la valeur moyenne sur un an des jours solaires vrais (durée ayant défini les 86400s des 24h avant les définitions modernes basées sur des horloges atomiques).

¹notion que nous précisons en 7.1.1

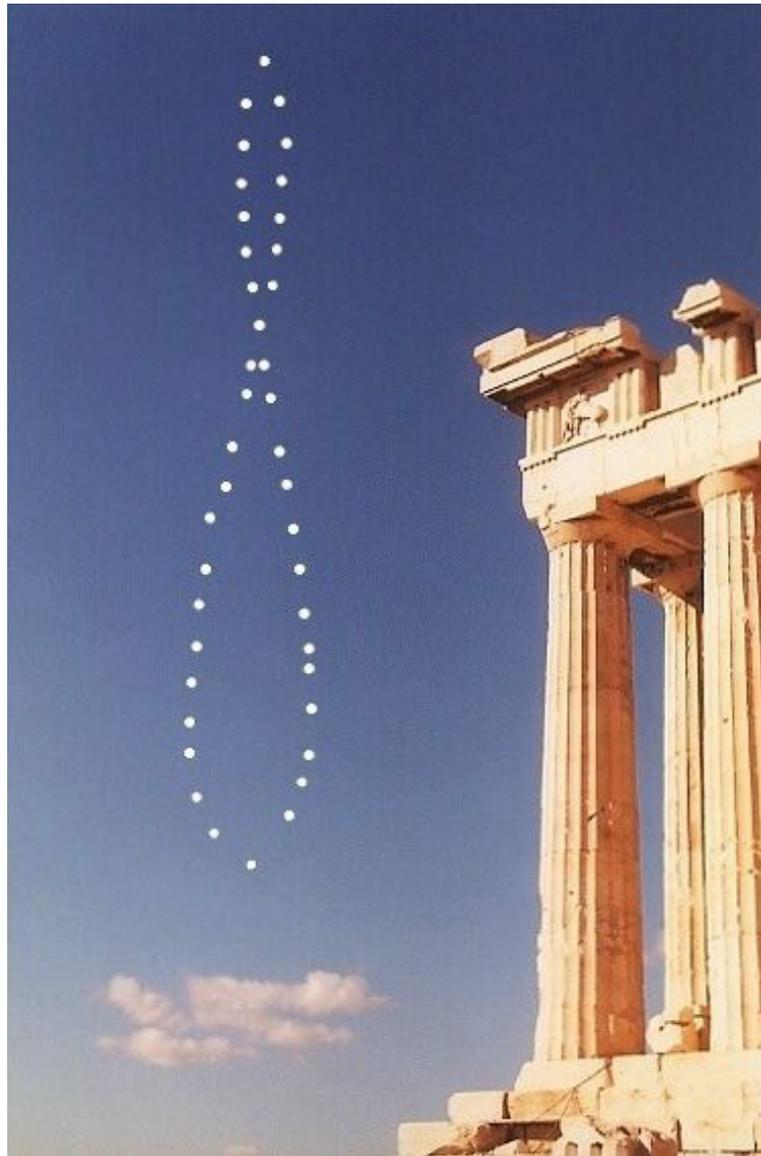


Figure 2.1: Analemma - Photo Anthony Ayiomamitis

L'heure civile correspond ainsi à un **Soleil moyen** équatorial fictif noté $\overline{\odot}$ qui fait un tour en un an à vitesse angulaire constante dans le **plan de l'équateur céleste** (alors que le Soleil ne parcourt *pas l'équateur mais l'écliptique*, et de plus à vitesse variable, dont la position coïncide avec celle du Soleil vrai à l'instant de l'équinoxe du printemps. Nous ajoutons le qualificatif d'**équatorial** à ce Soleil moyen, pour le différencier du *Soleil moyen écliptique* qui sera considéré au paragraphe 7.2.2, qui est un Soleil qui se déplace sur l'écliptique à vitesse angulaire constante.

L'heure solaire vraie correspond à la course du **Soleil vrai** noté \odot sur son ellipse situé dans le **plan de l'écliptique** incliné d'environ 27° sur le plan de l'équateur céleste. Lorsque la durée des jours solaires vrais est plus courte, le Soleil vrai est de plus en plus en retard par rapport au Soleil moyen équatorial avec un retard cumulé qui peut atteindre 14mn (le 11 février à 12h le Soleil n'est pas à son sommet en plein sud, mais légèrement à l'est car il doit encore se déplacer pendant 14mn pour passer au méridien au lieu). Puis le Soleil vrai rattrape ce retard pour prendre de l'avance qui atteint 3mn, puis il prend à nouveau du retard : 6 min de retard, pour finalement prendre 16 minutes d'avance (le 3 novembre à 12h le soleil a dépassé le méridien du lieu avec 16 m d'avance et se trouve donc légèrement l'ouest). Si d'un même lieu on photographie avec un appareil fixe la position du Soleil à midi, on constate qu'au lieu de parcourir une verticale entre sa hauteur maximale au solstice d'été et sa hauteur minimale au solstice d'hiver, il fait une courbe en huit appelée *analemma* (voir figure 2.1 tirée de <http://www.astrosurf.com/luxorion/analemma4.htm>).

Pour comprendre cette différence entre le temps moyen et un temps qui serait calé sur le soleil vrai, il faut prendre en compte le fait qu'un jour solaire vrai est constitué par la somme de la durée d'un jour stellaire, c'est-à-dire un tour complet de la Terre sur elle-même relativement aux étoiles qui se fait en environ 23h56mn4s, et d'une rotation supplémentaire qui dure environ 3mn56s pour retrouver la nouvelle position du Soleil qui s'est déplacé par

rappart aux étoiles d'environ 1° (360° en 365 jours). C'est cette rotation supplémentaire qui a une durée variable, variation qui résulte de la conjonction de deux phénomènes :

- Les jours solaires vrais sont plus longs quand la Terre est proche du Soleil (périhélie le 4 janvier environ). En effet la loi des aires de Kepler fait se déplacer le Soleil plus vite quand il est proche de la Terre parcourant ainsi une distance plus grande en un jour sur la voûte céleste. La rotation supplémentaire pour retrouver le Soleil le lendemain est donc plus longue. C'est l'inverse quand la Terre est éloignée du Soleil (aphélie le 4 juillet environ).
- Les jours solaires vrais sont plus courts aux équinoxes et plus longs aux solstices.
 - Aux solstices l'arc d'environ 1° de long parcouru par jour par le Soleil sur la voûte céleste se situe sur un parallèle à $\pm 27^\circ$ de déclinaison et est parallèle aux parallèles. Comme les méridiens terrestres se resserrent vers les pôles, la Terre doit tourner de plus d'un degré pour décrire ce arc parallèle de 1° à $\pm 27^\circ$ de latitude : Cette rotation dure plus de 3mn56s.
 - Aux équinoxes cet arc de 1° de long est situé au niveau de l'équateur qu'il traverse avec une pente de $\pm 27^\circ$. La Terre pour le décrire tourne de moins de 1° . Cette rotation dure moins de 3mn56s.

L'écart entre la position horaire du Soleil vrai et la position horaire du Soleil moyen équatorial est appelé l'*équation du temps*, nous en donnons une expression approché en 8.1.

2.2.2 Les temps universels

Les temps universels sont basés sur la course du soleil fictif dit *Soleil moyen* équatorial (symbolisé par \odot). Lorsque ce Soleil moyen équatorial passe par le méridien du lieu, c'est-à-dire lorsque son *angle horaire* est égal à 0h, il est *midi local* (voir la définition de l'angle horaire en 5.6).

Le *temps civil de Greenwich*, *GMT*, est l'*angle horaire du Soleil moyen équatorial mesuré à Greenwich*, auquel on ajoute 12h pour qu'il soit 12h à midi à Greenwich :

$$GMT = H_{\odot} + 12h$$

Depuis 1972, on l'appelle *temps universel TU* et on en distingue les versions suivantes :

- UT_0 mesure la rotation de la croute terrestre en utilisant des radio-sources extragalactiques, les satellites artificiels et la Lune.
- UT_1 corrige UT_0 du mouvement de la croute terrestre par rapport aux pôles géographiques. C'est le temps universel terrestre de référence.
- UT_2 est une version lissée corrigeant les variations saisonnières de UT_1 qui n'est plus utilisée.

Ces 3 temps ont des différences minimales ($< 0.03s$). *Ils ne sont pas linéaires* car bien que basés sur un Soleil moyen équatorial, ils sont basés sur la rotation *réelle* de la Terre qui est assez irrégulière. *UT* désigne généralement le temps UT_1 .

L'écart entre le temps des éphémérides régulier *TE* et le temps universel irrégulier *TU* lié à la rotation de la Terre est appelé ΔT :

$$\begin{aligned} \Delta T &= TE - TU \text{ avant 1984} \\ \Delta T &= TDT - TU \text{ de 1984 à 2000} \\ \Delta T &= TT - TU \text{ après 2000} \end{aligned}$$

Les valeurs de ΔT pour la période 1972-2015 (cf <http://www.stjarnhimlen.se/comp/time.html>) figurent dans le tableau 2.1.

Le dernier écart est un écart prédit.

Pour un passé plus lointain, l'écart ΔT a été estimé en comparant les instants auxquels ont été observés des évènements astronomiques tels que les éclipses et les instants calculés à partir de nos meilleurs modèles cinématiques actuels. Le tableau 2.2 fournit quelques estimations de ΔT depuis les premiers recueils d'observations astronomiques.

Ce temps universel irrégulier *TU*, n'est pas utilisé dans la vie civile. Pour celle-ci nos horloges fournissent le *temps universel coordonné* UT_C qui, entre deux corrections, est continu et régulier. Il est périodiquement corrigé de telle manière que son écart à *TU* reste en permanence inférieur à 0.9s :

$$|UT_C - TU| < 0.9s$$

date (UT)	ΔT						
1/1/1972	42.2	1/1/1980	50.5	1/7/1993	59.5	1/1/2009	65.8
1/7/1972	42.80	1/7/1981	51.8	1/7/1994	60.3	1/1/2012	66.7
1/1/1973	43.4	1/7/1982	52.6	1/1/1996	61.6	1/1/2014	67.3
1/1/1974	44.5	1/7/1983	53.4	1/7/1997	62.8	1/1/2015	67.7
1/1/1975	45.5	1/7/1985	54.6	1/1/1999	63.5	1/1/2016	68.1
1/1/1976	46.5	1/1/1988	55.8	1/1/2000	63.8	1/1/2017	68.5
1/1/1977	47.5	1/1/1990	56.9	1/1/2004	64.6	1/1/2018	69.2 (pred.)
1/1/1978	48.5	1/1/1991	57.6	1/1/2006	64.9	1/1/2019	69.8 (pred.)
1/1/1979	49.6	1/7/1992	58.7	1/1/2008	65.5	1/1/2020	70 (pred.)

Table 2.1: Évolution du DeltaT en secondes ces 30 dernières années

date	ΔT	date	ΔT	date	ΔT
-2000	54181	1600	77.7	1900	-2.7
-1500	39610	1700	10	1910	10.5
-1000	27364	1750	13	1920	21.2
-500	17444	1800	13.7	1930	24
0	9848	1820	12	1940	24.3
500	4577	1840	5.7	1950	29.2
1000	1625	1860	7.9	1960	33.2
1500	275	1880	-5.4	1970	40.2

Table 2.2: Évolution du DeltaT dans le passé lointain

Le temps universel coordonné UT_C a été initialisé strictement égal au TAI le 1^{er} janvier 1958, puis après des corrections il s'en est écarté, jusqu'à ce qu'à partir du 1^{er} janvier 1972 on impose aux corrections qu'elles soient telles que son écart avec le TAI soit un nombre entier de secondes :

$$TAI = UT_C + n$$

Les irrégularités sont telles qu'il suffit de modifier UT_C certains 1^{er} janvier ou 1^{er} juillet en le retardant d'une seconde pour respecter ces deux contraintes.

Le tableau 2.3 donne les écarts $n = TAI - UT_C$ de 1972 à nos jours. Dans ce tableau les périodes vont de la date indiquée à 0h0mn0s jusqu'à la veille de la date suivante à 23h59mn59s. La première seconde du jour initial est doublée, ou autrement dit une seconde supplémentaire est ajoutée à la dernière seconde du jour précédent, seconde numérotée 60 qui est comptée entre la seconde 59 de la période précédente et la seconde 0 de la période suivante : 23h58s, 23h59s, 23h60s, 0h00s, 0h01s. Le répétition de cette seconde fait augmenter l'écart entre TAI et UT_C d'une seconde.

date (UT_C)	n						
1972-01-01	+10	1979-01-01	+18	1991-01-01	+26	2009-01-01	+34
1972-07-01	+11	1980-01-01	+19	1992-07-01	+27	2012-07-01	+35
1973-01-01	+12	1981-07-01	+20	1993-07-01	+28	2015-07-01	+36
1974-01-01	+13	1982-07-01	+21	1994-07-01	+29	2017-01-01	+37
1975-01-01	+14	1983-07-01	+22	1996-01-01	+30		
1976-01-01	+15	1985-07-01	+23	1997-07-01	+31		
1977-01-01	+16	1988-01-01	+24	1999-01-01	+32		
1978-01-01	+17	1990-01-01	+25	2006-01-01	+33		

Table 2.3: Corrections en secondes de l' UT_C ces 30 dernières années

Le temps universel coordonné UT_C est la base légale mondiale de l'heure depuis 1985. C'est lui qui est utilisé pour dater et repérer tous les évènements de notre activité civile.

Le temps GPS a été pris égal au temps UT_C le 6/1/1980 (date de la création du temps GPS). Étant continu (écart fixe de 19 secondes avec le TAI), il s'est séparé de l' UT_C le 1/7/1981, date de la correction suivante du temps UT_C . Depuis, on a :

$$T_{GPS} = UT_C + n - 19$$

Le temps UT_C et l'écart $TU - UT_C$ sont diffusés sous forme de signaux horaires en ondes courtes par des stations de radios réparties sur la Terre entière. Les valeurs prédites de ces écarts sont publiées par l'IERS (Service

International de la Rotation de la Terre et des Systèmes de Référence : <http://maia.usno.navy.mil/ser7/ser7.dat>). Le tableau 2.4 montre que les différences $TU - UT_C$ restent effectivement inférieures à 0.9s, en valeur absolue :

date (UT_C)	$UT_C - TU$	date (UT_C)	$UT_C - TU$	date (UT_C)	$UT_C - TU$
1972-01-01	0.05	1980-01-01	-0.64	1993-07-01	-0.68
1972-07-01	-0.38	1981-07-01	-0.4	1994-07-01	-0.88
1973-01-01	-0.81	1982-07-01	-0.61	1996-01-01	-0.55
1974-01-01	-0.69	1983-07-01	-0.8	1997-07-01	-0.38
1975-01-01	-0.7	1985-07-01	-0.57	1999-01-01	-0.72
1976-01-01	-0.72	1988-01-01	-0.36	2006-01-01	-0.33
1977-01-01	-0.66	1990-01-01	-0.32	2017-01-01	-0.59
1978-01-01	-0.65	1991-01-01	-0.61		
1979-01-01	-0.59	1992-07-01	-0.46		

Table 2.4: différences $UT_C - UT1$ ces 30 dernières années

Résumé :

Le temps civil des horloges est le temps universel coordonné UT_C , linéaire par morceau, présentant des sauts d'une seconde certains 1^{er} janvier ou 1^{er} juillet. Son écart par rapport au temps atomique international TAI , continu et linéaire, est un nombre entier de secondes.

L'orientation réelle instantanée de la Terre, par rapport au Soleil moyen équatorial est mesurée par le temps universel TU (ex GMT) dont l'écart avec UT_C est toujours inférieur à 0.9s (UT_C est modifié dans ce but). Cette orientation est telle qu'à 12h TU le soleil moyen équatorial passe par le méridien du lieu.

Le temps appelé des temps des éphémérides TE , puis dynamique TDT ou TBT , puis terrestre TT est le temps continu linéaire utilisé pour calculer les positions des astres. Bien que son appellation officielle actuelle soit temps terrestre on continue dans ce document à l'appeler temps des éphémérides et on le notera indifféremment TE , TD ou TT . Le temps civil universel sera noté TU . Le temps TE a 32.184s d'avance sur le temps TAI .

L'écart $TE - TU$ est appelé Delta T. Des tables donnent ses valeurs estimées pour certaines années de l'antiquité à nos jours.

2.2.3 Passage du temps universel au temps des éphémérides

Pour simuler un évènement postérieur au 1/1/1972 ayant eu lieu à une date UT_C donnée, on peut calculer le temps des éphémérides par :

$$TE = UT_C + n + 32.184s$$

où n est donné par le tableau 2.3.

Pour les dates antérieures, on ne fera pas de différence entre TU et UT_C et on calculera le temps des éphémérides par :

$$TE = TU + \Delta T$$

avec les approximations suivantes pour ΔT :

$$\begin{aligned}
 -2137 \leq t \leq 1/1/1664 &\Rightarrow \Delta T = 40.65 + 35u^2 \text{ avec } u = (t - 1625)/100 \\
 1/1/1664 \leq t \leq 1/1/1840 &\Rightarrow \Delta T = 102.12 + 102u + 25.3u^2; u = (t - 2000)/100 \\
 1/1/1840 \leq t \leq 1/1/1880 &\Rightarrow \Delta T = 6.6 + 46.3u - 358.4u^2 + 18.8u^3; u = (t - 1850)/100 \\
 1/1/1880 \leq t \leq 1/1/2000 &\Rightarrow \Delta T = -11.26 + 0.62575(t - 1880) \\
 1/1/2000 \leq t &\Rightarrow \Delta T = 63.86 + 0.26687(t - 2000)
 \end{aligned}$$

L'approximation de 1840 à 1880 est donnée dans l'ouvrage Montenbruck & Pfleger's Astronomy on the Personal Computer (2000). La dernière approximation linéaire a été faite à partir des tables fournissant les dernières valeurs connues de ΔT en 2016. L'avant dernière approximation linéaire a été calculée pour se raccorder aux deux approximations qui l'encadrent. Pour la seconde approximation due à Michelle Chapront-Touzé, Jean Chapront et G. Francou du Bureau des Longitudes, nous avons modifié le terme constant de 0.12s pour avoir un raccord précis avec l'approximation suivante et de même, nous avons modifier le terme constant de la première approximation due à K.M. Borkowski, de 0.65s.

Pour la période de 1830 à 2000, l'écart entre ces très simples approximations et des approximations polynomiales beaucoup plus complexes est toujours inférieur à 8s. Pour la période de 1976 à 2000, l'écart par rapport aux tables est inférieur à 2s et pour la période de 2000 à 2016, il est inférieur à 0.6s.

Remarque : Bien que l'imprécision absolue de ces formules soit la plupart du temps supérieure à la seconde, les termes constants sont fournis au centième de seconde près afin que les raccords entre les tranches s'effectuent

avec cette même précision dans le but de limiter les phénomènes de cycle limite dans les processus itératifs de résolution par approximations successives.

Dans la bibliothèque GNU Octave associée à ce document on trouvera les fonctions `jul2deltaT` et `jul2deltaT_s` qui fournissent ΔT en fonction du jour julien.

2.3 Jours juliens

C'est un système de datation *continu* qui permet de dater les événements en jours décimaux écoulés depuis le lundi 1^{er} janvier 4173 av. J.-C. à midi. Il permet de calculer par simple différence le temps qui s'est écoulé entre deux dates. Son utilisation (avec éventuellement un décalage d'origine, ou un facteur d'échelle) facilite les calculs algébriques. Les années avant J.-C. sont comptées négativement. Mais il faut faire attention car les historiens notent -1 l'an 1 av. J.-C., -2 l'an 2 av. J.-C..., alors que pour nos calculs l'an 1 av. J.-C. doit être compté 0, l'an 2 av. J.-C. doit être compté -1.... La date du 1^{er} janvier 4173 av. J.-C. à midi, également notée 1^{er} janvier -4173 à midi, par les historiens devient pour les astronomes le 1^{er} janvier -4172 à midi. Sa valeur en jour julien vaut 0. Le 2 janvier -4172 (astronome) à 0h vaut 0.5, etc.

Au passage du calendrier Julien au calendrier Grégorien, la continuité est assurée en faisant correspondre le jeudi 4 octobre 1582 à minuit du calendrier Julien au vendredi 15 octobre 1582 à 0h du calendrier Grégorien avec pour valeur le jour julien 2299160.5. Les 10 jours entre ces deux instants simultanés ont une durée nulle.

Remarque : Il n'y a pas de rapport direct entre jour julien (JJ) et calendrier julien, par contre on utilise souvent comme unité multiple l'**année julienne** qui compte exactement 365.25 jours juliens, comme l'année des calendriers juliens (et également les siècles juliens de 36525 JJ et les millénaires juliens de 365250 JJ.)

Pour différencier les jours juliens correspondant aux dates en temps civil (TU ou UTC) des jours juliens correspondant aux dates en temps des éphémérides (TE , TD ou TT) on notera les premiers JU et les seconds JD . Pour les JU (temps civil), à midi, le Soleil passe aux environs du méridien de Greenwich. Pour le JD (temps des éphémérides) c'est approximativement vrai à notre époque, mais si on regarde le tableau 2.2, on voit que vers -1500 avec un ΔT de l'ordre de 40000 s il faisait nuit noire à Greenwich aux environs de midi.

On utilisera J lorsque la date est utilisée aussi bien pour le temps universel que pour le temps dynamique.

Dans la bibliothèque GNU Octave associée à ce document on trouvera des fonctions qui permettent de convertir une date en jour julien et un jour julien en date : `dmy2jul`, `jul2dmy`...

2.4 Catalogues fondamentaux et époques standards

Tous les alignements spatiaux même ceux qui servent de référence (direction du point vernal, direction des pôles, ...) bougent avec le temps. Les coordonnées des étoiles et les paramètres des formules permettant de calculer les coordonnées des astres à tout instant sont connus relativement à la situation des référentiels à certaines dates particulières et sont régulièrement publiés dans des catalogues également à certaines dates particulières appelées **époques**.

Le premier catalogue moderne date du 31/12/1899 à 19h31m26s, Cette date porte le nom d'époque **B1900.0** et son jour julien est noté $JD_{B1900.0}$. On a :

$$JD_{B1900.0} = 2415020.31352$$

Les catalogues se sont succédés annuellement avec des intervalles strictement égaux à l'année tropique évaluée à cette époque. Cet intervalle appelé **année besselienne** compte 365.242198781 jours. Les dates de publication de ces calendriers sont appelées des **époques bessiennes**. Ainsi l'époque Besselienne **B1950.0** correspond au

$$JD_{B1950.0} = JD_{B1900.0} + 50.0 \times 365.242198781$$

soit :

$$JD_{B1950.0} = 2433282.4235 \rightarrow 31/12/1949 \text{ 22h09m50s}$$

Un nouveau système de calcul des époques standards a été défini avec un intervalle strictement égal à 365.25 jours (une année julienne). Les nouveaux calendriers sont publiés à des dates appelées **époques juliennes** et la **nouvelle époque de référence** est l'époque julienne notée **J2000.0** qui correspond au 1/1/2000 12h00m00s, c'est-à-dire au :

$$JD_{J2000.0} = 2451545.0$$

Avec ce système l'époque julienne J1950.0 correspond au :

$$JD_{J1950.0} = JD_{J2000.0} - 50.0 \times 365.25$$

soit :

$$JD_{J1950.0} = 2433282.5 \rightarrow 1/1/1950 \text{ 00h00m00s}$$

Dans le système besselien l'époque J1950.0 correspond à :

$$B1900.0 + \frac{2433282.5 - 2415020.31352}{365.242198781} = B1950.00021$$

Dans le système julien l'époque B1900.0 correspond à :

$$J2000.0 + \frac{2415020.31352 - 2451545.0}{365.25} = J1900.00086$$

Les deux derniers grands catalogues fondamentaux d'étoiles sont le FK4 et le FK5 (FK = Fundamental Katalog). Le FK4 est relatif à l'époque besselienne B1950.0. et le FK5 est relatif à l'époque julienne J2000.0.

Remarque : La date J2000.0, à savoir le 1/1/2000 12h00m00s est utilisé dans toutes les relations algébriques qui sont exprimées en temps des éphémérides TE avec pour valeur $JD_{J2000.0} = 2451545.0$, à l'exception des relations fournissant l'orientation de la Terre par le biais du temps sidéral de Greenwich qui elles sont exprimées en temps universel TU , et ceci avec la même valeur $JU_{J2000.0} = 2451545.0$. Ces deux instants sont donc séparés par $\Delta T_{J2000.0} \simeq 64$ s. La date J2000.0 a donc toujours la même valeur dans toutes les formules, mais ne représente pas exactement le même instant dans les relations exprimées en temps des éphémérides et dans les relations exprimées en temps universel.

2.5 Temps universel ou temps des éphémérides ?

Rappelons que le temps utilisé dans les équations est un temps linéaire continu appelé successivement temps des éphémérides (noté TE), temps dynamique terrestre (noté TD ou TDT), temps terrestre (noté TT), etc. Au niveau des formules présentées dans ce document ces trois temps seront confondus. Ils diffèrent du temps civil universel que nous notons TU d'une quantité ΔT variable avec le temps dont certaines valeurs sont données dans la table 2.1. Pour donner des valeurs numériques décimales simples à ces deux temps il est pratique d'utiliser comme unités les jours juliens (des éphémérides ou universels) exprimés soit en secondes juliennes décimales (1/86400ème de jour julien décimal), soit en jours juliens décimaux, soit en siècles juliens décimaux (36525 jours juliens), soit encore en millénaires juliens décimaux (365250 jours juliens).

Les formules qui permettent de calculer les positions des planètes, du Soleil et de la Lune utilisent le temps des éphémérides.

Pour les formules qui fournissent les directions des étoiles dans les repères écliptiques et équatoriaux, on utilisera de préférence le temps des éphémérides au temps universel, mais l'évolution des directions des étoiles et de ces repères est si lente qu'on peut négliger dans ce cas l'influence du ΔT .

Par contre, c'est le temps universel qui doit être utilisé dans l'équation qui fournit l'orientation de la Terre par le biais du temps sidéral.

Chapitre 3

Directions et repères fixes

Ce chapitre est consacré à la définition des directions quasi fixes qui sont utilisées comme directions des axes de base des repères de références (utilisés pour localiser les objets spatiaux), à la définition des systèmes de coordonnées employés avec ces repères et aux relations qui existent entre ces différents systèmes.

L'astronomie est une science très ancienne qui remonte à l'antiquité avec en particulier l'école Grecque de Milet (Thalès, Anaximandre, Pythagore), Philolaos de Crotona, Méton d'Athènes, Aristarque de Samos, Archimède de Syracuse, Eratosthène de Cyrène et Hipparque de Nicée. En 141 de notre ère, Claude Ptolémée d'Alexandrie rédige l'Almageste (syntaxe mathématique) qui est le premier ouvrage d'astronomie et trigonométrie sphérique qui nous soit parvenu. Le poids de l'histoire est ainsi très fort et nous utilisons encore de nos jours des concepts, comme la longitude et la latitude, élaborés par Ptolémée. Ce poids est parfois un fardeau qui nous oblige à manipuler des angles comptés positifs parfois dans le sens trigonométrique direct, parfois dans l'autre sens, parfois exprimés en heures minutes et secondes, en heures décimales, en degrés minutes et secondes, en degrés décimaux, en radians, etc. Tous les astronomes n'utilisent pas les mêmes conventions pour le sens des angles, ou leur origine, comme par exemple l'origine des azimuts qui est la direction du Nord pour les uns et la direction du Sud pour les autres.

L'objectif ce chapitre est de permettre de suivre le chemin qui va des définitions ou des concepts simples jusqu'aux formules complexes par une succession d'étapes compréhensibles.

3.1 Nos notations pour les matrices de rotation

Dans cet ouvrage nous avons choisi de ne pas utiliser les relations de la trigonométrie sphérique et de s'en passer, car il nous semble (peut-être à tort) qu'il est plus simple d'établir toutes les formules de changements de coordonnées astronomiques à l'aide des matrices de rotation dans l'espace à 3 dimensions.

IMPORTANT : Ne pas sauter ce paragraphe, même si a priori tout cela vous paraît évident, car dans ce paragraphe nous définissons les notations que nous utilisons pour les matrices élémentaires de rotation, sachant qu'environ la moitié des mathématiciens utilisent une convention inverse de la nôtre. Les deux conventions ont leurs avantages et leurs inconvénients. Une convention n'est pas meilleur que l'autre, mais il faut choisir et ensuite se tenir à son choix.

3.1.1 Matrice de rotation élémentaires

Les 3 seules matrices à connaître sont les matrices $R_X(a)$, $R_Y(a)$, et $R_Z(a)$ qui par définition de nos notations ont pour éléments :

$$R_X(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos a & -\sin a \\ 0 & \sin a & \cos a \end{pmatrix} \quad R_Y(a) = \begin{pmatrix} \cos a & 0 & \sin a \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin a & 0 & \cos a \end{pmatrix}$$
$$R_Z(a) = \begin{pmatrix} \cos a & -\sin a & 0 \\ \sin a & \cos a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On retiendra que pour $R_X(a)$ et $R_Z(a)$ le seul signe moins (-) porte sur le sinus en haut à droite du bloc *compact* cos-sin alors que pour $R_Y(a)$ le seul signe moins (-) porte sur le sinus en bas à gauche du bloc *éclaté* cos-sin.

Dans la bibliothèque GNU Octave associée à ce document on trouvera les fonctions `mrotX`, `mrotY` et `mrotZ` qui génèrent ces 3 matrices.

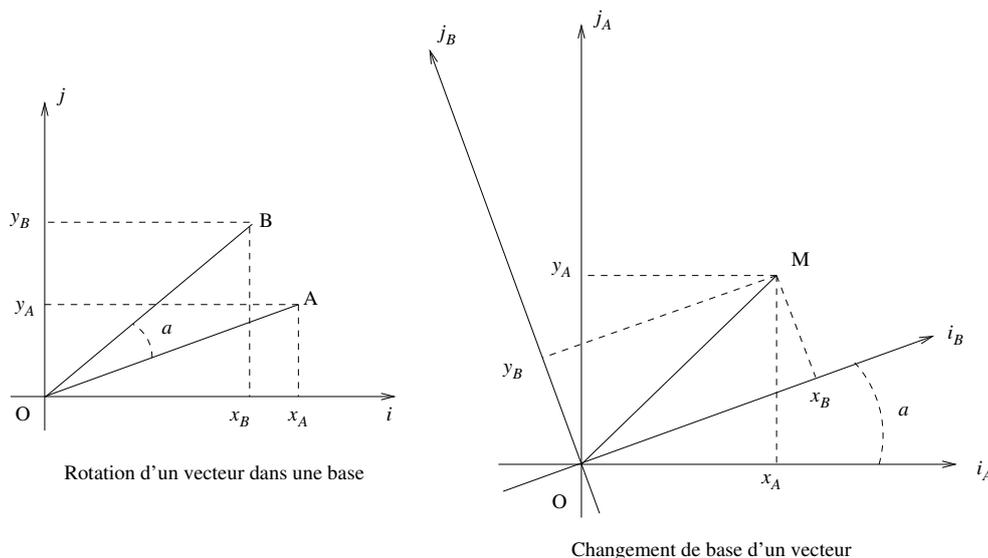


Figure 3.1: Rotation et changement de base

3.1.2 Opérateur rotation

La figure 3.1 montre les deux utilisations classiques de la matrice $R_Z(a)$.

A droite l'utilisation en matrice de rotation. Le vecteur \vec{OA} est transformé en vecteur \vec{OB} par une rotation d'angle a (sens trigonométrique direct) autour du vecteur \vec{k} orthogonal à la figure. Notons \mathcal{R}_{AB} la rotation (indice AB signifiant A vers B) qui transforme le vecteur \vec{OA} en vecteur \vec{OB} . En notant $(OA)_0 = \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix}$ les composantes du vecteur \vec{OA} dans la base $\mathcal{B}_0 = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, $(OB)_0 = \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{pmatrix}$ celles du vecteur \vec{OB} dans cette même base et $[\mathcal{R}_{AB}]_0$ celles de l'opérateur¹ \mathcal{R}_{AB} dans la base associée à \mathcal{B}_0 pour les opérateurs, on a :

$$(OB)_0 = [\mathcal{R}_{AB}]_0 (OA)_0$$

Pour simplifier, nous posons :

$$R_{AB} = [\mathcal{R}_{AB}]_0$$

ce qui permet d'écrire :

$$\begin{pmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{pmatrix} = R_{AB} \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix} \tag{3.1}$$

$$\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix} = R_{AB}^{-1} \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{pmatrix}$$

Le lecteur pourra vérifier que :

$$R_{AB} = R_Z(a)$$

$$R_{AB}^{-1} = R_{AB}^T = R_Z^T(a) = R_Z(-a) = R_{BA}$$

Ici, on a une base unique $\mathcal{B}_0 = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ dans laquelle sont exprimées toutes les composantes, à savoir celles des vecteurs \vec{OA} et \vec{OB} et celles de l'opérateur \mathcal{R}_{AB} qui les transforment. Les éléments a_{ij} de la matrice R_{AB} sont appelés les **composantes** de cet opérateur rotation dans la base des opérateurs associée à la base \mathcal{B}_0 des vecteurs.

¹Nous utilisons le mot opérateur pour éviter d'utiliser le mot tenseur qui est plus approprié mais qui pourrait effrayer certains lecteurs.

3.1.3 Changement de base d'un vecteur

La partie gauche de la figure 3.1 montre l'utilisation en matrice de changement de base. Considérons la base $\mathcal{B}_B = \{\vec{i}_B, \vec{j}_B, \vec{k}_B\}$ transformée de la base $\mathcal{B}_A = \{\vec{i}_A, \vec{j}_A, \vec{k}_A\}$ par la rotation \mathcal{R}_{AB} d'angle a (sens trigonométrique direct) autour des vecteurs $\vec{k}_A = \vec{k}_B$ orthogonaux à la figure.

En notant $(OM)_A = \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix}$ les composantes du vecteur \vec{OM} dans la base \mathcal{B}_A et $(OM)_B = \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{pmatrix}$ ses composantes dans la base \mathcal{B}_B , elles sont reliées par les relations :

$$(OM)_A = C (OM)_B \text{ et } (OM)_B = C^T (OM)_A$$

où C est la matrice de passage entre \mathcal{B}_A et \mathcal{B}_B .

Le lecteur pourra vérifier l'égalité des éléments des matrices :

$$C = [\mathcal{R}_{AB}]_A = R_Z(a)$$

Puisqu'il y a identité entre C et $[\mathcal{R}_{AB}]_A$, nous continuerons à simplifier les notations en posant :

$$R_{AB} = C = [\mathcal{R}_{AB}]_A$$

(qui ici sont égales à $R_Z(a)$), ce permet d'écrire :

$$\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix} = R_{AB} \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{pmatrix} = R_{AB}^T \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix}$$

Ces relations sont les inverses des relations précédentes 3.1. Les utilisateurs qui n'ont pas l'habitude de cette différence entre changement de base d'un même vecteur et transformation d'un vecteur en un autre se trompent facilement de matrice en prenant la transposée de celle qu'il faut utiliser.

Ici la matrice $R_{AB} = R_Z(a)$ est utilisée comme matrice de changement de base qui permet de calculer les composantes du vecteur \vec{OM} dans la base de départ \mathcal{B}_A à partir de ses composantes dans la base d'arrivée \mathcal{B}_B . Les éléments a_{ij} de la matrice R_{AB} sont appelés les **coefficients** de la matrice de changement de base, alors que dans le cas précédent c'étaient les composantes de l'opérateur rotation. Dans cette deuxième utilisation, l'opérateur rotation \mathcal{R}_{AB} est également présent. Appliqué à $\mathcal{B}_A = \{\vec{i}_A, \vec{j}_A, \vec{k}_A\}$ il fournit $\mathcal{B}_B = \{\vec{i}_B, \vec{j}_B, \vec{k}_B\}$ (sens indice A vers indice B) et la matrice de changement de base $C \equiv [\mathcal{R}_{AB}]_A$ appliquée à $(OM)_B$ fournit $(OM)_A$ (sens indice B vers indice A). C'est pour cela qu'on dit que les composantes d'un vecteur sont **contravariantes** dans un changement de base.

3.1.4 Changement de base d'un opérateur

Considérons un opérateur quelconque \mathcal{F} qui transforme un vecteur \vec{V} en vecteur \vec{W} : $\vec{W} = \mathcal{F}(\vec{V})$ ce qui s'écrit dans les bases \mathcal{B}_A et \mathcal{B}_B :

$$(W)_A = [F]_A (V)_A$$

$$(W)_B = [F]_B (V)_B$$

Le lecteur pourra vérifier que les changement de base $(V)_A = R_{AB} (V)_B$ et $(W)_A = R_{AB} (W)_B$ impliquent :

$$[F]_A = R_{AB} [F]_B R_{AB}^T \tag{3.2}$$

Par rapport au changement de base d'un vecteur (tenseur d'ordre 1), celui d'un opérateur (tenseur d'ordre 2) nécessite en plus la post-multiplication par la matrice de changement de base inverse (transposée en repères orthonormés).

Il en résulte que :

$$[\mathcal{R}_{AB}]_B = R_{AB}^T [\mathcal{R}_{AB}]_A R_{AB} = R_{AB}$$

d'où l'identité surprenante a priori :

$$[\mathcal{R}_{AB}]_A = [\mathcal{R}_{AB}]_B \tag{3.3}$$

Mais $[\mathcal{R}_{AB}]_A \neq [\mathcal{R}_{AB}]_C$ pour toute autre base \mathcal{B}_C .

Pour les sceptiques uniquement. En notant :

$$\hat{U} = \begin{bmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{bmatrix}$$

les composantes de l'opérateur pré-produit vectoriel par le vecteur unitaire \vec{u} dans une certaine base \mathcal{B} où ce vecteur a pour composantes $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, l'opérateur rotation d'angle a autour de \vec{u} a pour composantes dans cette base :

$$R_{a,u} = I + \sin a \hat{U} + (1 - \cos a) \hat{U}^2$$

où I est la matrice identité. Le lecteur pourra vérifier en essayant successivement avec les composantes des vecteurs de base \vec{i}, \vec{j} puis \vec{k} qu'on retrouve bien les matrices $R_X(a), R_Y(a)$ et $R_Z(a)$. Considérons le cas où \vec{u} est le vecteur de la rotation $\mathcal{R}_{a,u} = \mathcal{R}_{AB}$ qui transforme \mathcal{B}_A en \mathcal{B}_B . Ce vecteur est fixe dans \mathcal{B}_A et les directions de \mathcal{B}_B tournent par rapport à lui. Ses composantes sont donc des constantes dans \mathcal{B}_A . Mais la rotation inverse autour de ce même vecteur transforme \mathcal{B}_B en \mathcal{B}_A , ce vecteur est donc également fixe dans \mathcal{B}_B et les directions de \mathcal{B}_A tournent par rapport à lui. Ses composantes sont aussi des constantes dans \mathcal{B}_B . En fait \vec{u} est l'axe de la rotation de ces deux bases et ses composantes sont fixes dans les deux bases. Comme ces composantes sont égales entre elles quand $a = 0$, elles sont toujours égales dans ces deux bases :

$$(u)_A = (u)_B$$

Il en est de même des composantes de \hat{U} et de $\mathcal{R}_{a,u} = \mathcal{R}_{AB}$, d'où l'identité 3.3.

3.1.5 Rotations successives

Considérons la rotation \mathcal{R}_{12} qui transforme V_1 en V_2 , la rotation \mathcal{R}_{23} qui transforme V_2 en V_3 et la rotation \mathcal{R}_{13} qui transforme V_1 en V_3 . On a :

$$\begin{aligned} (V_2)_0 &= [\mathcal{R}_{12}]_0 (V_1)_0 \\ (V_3)_0 &= [\mathcal{R}_{23}]_0 (V_2)_0 = [\mathcal{R}_{23}]_0 [\mathcal{R}_{12}]_0 (V_1)_0 \\ (V_3)_0 &= [\mathcal{R}_{13}]_0 (V_1)_0 \end{aligned}$$

d'où :

$$[\mathcal{R}_{13}]_0 = [\mathcal{R}_{23}]_0 [\mathcal{R}_{12}]_0 \tag{3.4}$$

Le produit des matrices de composantes toutes exprimées dans une même base se fait dans l'ordre inverse de l'application des rotations.

Remarque : Si deux rotations successives se font autour du même axe \vec{u} , d'angle a , puis b , la rotation résultante se fait toujours autour de \vec{u} , d'angle $a + b$. Dans ce cas le produit des 2 rotations commute.

3.1.6 Matrice de passage

Nous appelons matrice de passage la matrice R_{AB} qui sera interprétée selon les circonstances comme la matrice de changement de base permettant de calculer les composantes dans la base \mathcal{B}_A en fonction des composantes dans la base \mathcal{B}_B ou comme la matrices des composantes de l'opérateur rotation \mathcal{R}_{AB} dans les bases \mathcal{B}_A ou \mathcal{B}_B :

$$R_{AB} = [\mathcal{R}_{AB}]_A = [\mathcal{R}_{AB}]_B$$

L'opérateur rotation \mathcal{R}_{AB} transforme \vec{i}_A en \vec{i}_B , d'où en composantes dans la base \mathcal{B}_A :

$$\begin{pmatrix} \vec{i}_B \end{pmatrix}_A = [R_{AB}]_A \begin{pmatrix} \vec{i}_A \end{pmatrix}_A$$

Or $\begin{pmatrix} \vec{i}_A \end{pmatrix}_A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Le produit par la matrice R_{AB} fournit la première colonne de cette matrice. Il en résulte que :

$$R_{AB} = \left[\begin{pmatrix} \vec{i}_B \end{pmatrix}_A \quad \begin{pmatrix} \vec{j}_B \end{pmatrix}_A \quad \begin{pmatrix} \vec{k}_B \end{pmatrix}_A \right] = [\mathcal{B}_B]_A$$

Cette relation montre que les colonnes de R_{AB} sont les composantes des vecteurs de la base \mathcal{B}_B exprimées dans la base \mathcal{B}_A .

Dans l'exemple de la figure 3.1, l'axe de la rotation $R_{AB} = R_Z(a)$ est $\vec{k}_A = \vec{k}_B$. Il en résulte $(\vec{k}_B)_A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

qui est bien la troisième colonne de $R_Z(a)$. Par ailleurs, sur la même figure on a $(\vec{i}_B)_A = \begin{pmatrix} \cos a \\ \sin a \\ 0 \end{pmatrix}$ avec tous les signes positifs. La matrice $R_Z(a)$ qui figure section 3.1.1 est bien la matrice R_{AB} .

La matrice de passage R_{AB} représente deux entités bien distinctes, mais qui ont les mêmes éléments a_{ij} , ce qui est une source d'erreur et de confusion lorsqu'on n'a pas pris conscience de ce fait.

Comme on peut le voir, dans la deuxième utilisation, les coefficients $R_{AB} = R_Z(a)$ de la matrice de changement de base permettent de calculer les composantes $(OM)_A = \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix}$ alors que dans la première utilisation les

composantes $R_{AB} = R_Z(a)$ de l'opérateur rotation permettent de calculer les composantes $(OB)_0 = \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{pmatrix}$.

Dans son rôle d'opérateur rotation, la matrice de passage est essentiellement utilisé pour définir les orientations de diverses bases. Les rotations sont utilisées pour déplacer une direction de base, successivement vers de nouvelles directions de base, jusqu'à la dernière direction de base. Le rôle de matrice de changement de base est essentiellement utilisé dans les calculs pour exprimer les cosinus directeurs ou les composantes de la direction ou du vecteur étudié qui dépendent de la base dans laquelle ils sont exprimés.

Remarque : Dans l'univers des mathématiciens qui traitent intensivement des rotations, j'ai l'impression qu'une moitié utilise notre convention, et qu'une autre moitié utilise la convention symétrique. Par exemple, le *Bureau Des Longitudes* (BDL) utilise dans ses ouvrages [6] les matrices élémentaires $R_1(a)$, $R_2(a)$ et $R_3(a)$ qui sont liées aux nôtres par les relations :

$$\begin{aligned} R_1(a) &= R_X^T(a) = R_X(-a) \\ R_2(a) &= R_Y^T(a) = R_Y(-a) \\ R_3(a) &= R_Z^T(a) = R_Z(-a) \end{aligned}$$

Il faudra en tenir compte pour comparer les formules que nous donnons avec celles du BDL. A mon avis, ces deux conventions sont strictement équivalentes et en général on reste attaché à celle à laquelle on s'est habitué au départ. Le lecteur habitué à la convention symétrique aura sans doute plus de mal à suivre tous nos calculs que le lecteur qui n'a pas encore d'habitude.

3.1.7 Changement de base successifs

Soit la rotation \mathcal{R}_{12} transformant la base \mathcal{B}_1 en \mathcal{B}_2 et la rotation \mathcal{R}_{23} transformant la base \mathcal{B}_2 en \mathcal{B}_3 et la rotation \mathcal{R}_{13} transformant la base \mathcal{B}_1 en \mathcal{B}_3 , et un vecteur unique \vec{V} . Les composantes de ce vecteur dans les différentes bases sont liées par :

$$\begin{aligned} (V)_1 &= R_{13}(V)_3 \\ (V)_2 &= R_{23}(V)_3 \\ (V)_1 &= R_{12}(V)_2 = R_{12}R_{23}(V)_3 \end{aligned}$$

d'où :

$$R_{13} = R_{12}R_{23} \tag{3.5}$$

Le produit des matrices de changement de base se fait, avec notre convention dans l'ordre d'application des rotations.

Cette relation s'écrit également :

$$[\mathcal{R}_{13}]_{1 \text{ ou } 3} = [\mathcal{R}_{12}]_{1 \text{ ou } 2} [\mathcal{R}_{23}]_{2 \text{ ou } 3}$$

Elle montre que le produit des matrices de composantes des opérateurs rotation exprimées dans une des bases qu'ils transforment se fait dans l'ordre de l'application des rotations.

On retiendra la simplicité de la relation 3.5, analogue à une simple relation de concaténation $AC = AB + BC$. La relation 3.4 qui est mise en avant dans les cours n'est jamais utilisée en pratique, car les composantes des opérateurs rotations sont connus dans les bases qu'ils transforment et le calcul de leurs composantes dans une autre base (formule 3.2) est coûteux.

3.1.8 Remarques

3.1.8.1 Commutativité des matrices de micro-rotation

Lorsque l'angle de rotation est suffisamment petit pour qu'on puisse approximer son sinus par la valeur de l'angle (en radian) et son cosinus par 1, on dit qu'on est en présence d'une micro-rotation. L'intérêt des micro-rotations est que lorsque l'on en effectue plusieurs l'une après l'autre, le résultat est indifférent de l'ordre. Les matrices de micro-rotation commutent entre elles (dans l'approximation qui consiste à négliger les produits de petits angles qui sont des infiniment petits du 2ème ordre) contrairement aux matrices de rotation normales qui ne commutent pas, ni entre elles, ni avec une matrice de micro-rotation. Cette propriété de commutativité des matrices de micro-rotation est utilisée plusieurs fois dans ce document, car dans leur cas on ne se posera aucune question concernant leur ordre d'application.

3.1.8.2 Vocabulaire

Dans ce qui suit nous essaierons de n'utiliser le mot repère à la place du mot base que lorsque l'origine du repère est précisée.

Rappelons la différence qui existe entre :

- les 2 ou 3 *coordonnées* d'une direction ou d'un point qui peuvent être des paramètres très divers utilisés pour repérer ce point ou cette direction relativement à une base ou un repère (coordonnées polaires, cylindriques, cartésiennes, etc.),
- les 3 *composantes* d'un vecteur qui, dans le cas d'une base orthonormée, sont égales aux produits scalaires du vecteur avec les vecteurs de la base. Les 3 composantes sont indépendantes.
- les 3 *cosinus directeurs* d'une direction qui sont les 3 composantes d'un vecteur unitaire portés par cette direction. Ces 3 quantités ne sont pas indépendantes. Elles sont liées par la relation qui spécifie la longueur unité de ce vecteur.

3.2 Généralités sur les plans et directions de référence

- **La sphère céleste** : C'est une sphère imaginaire de rayon arbitraire que l'on centre en différents points du système solaire selon les besoins : le barycentre du système solaire (**BRS** : barycentric Reference system), le centre de masse de la Terre (**GRS** Geocentric Reference System), etc. Sur cette sphère les étoiles sont quasi fixes. Les distances entre les points de cette sphère sont mesurées en radians ou en degrés ou en heures. En fait ce sont les angles entre les directions des vecteurs reliant l'origine de la sphère à ces points. Les anciens imaginaient deux sphères entourant leur monde : une sphère locale fixe centrée sur le lieu d'observation et une sphère céleste mobile sur laquelle étaient collées les étoiles. Cette sphère céleste mobile glissait en tournant contre la sphère locale.
- **Les pôles célestes - l'axe de rotation de la Terre - le plan équatorial** : Sur la sphère céleste les étoiles décrivent des cercles autour de deux points fixes appelés *pôles célestes* des éphémérides (CEP : Celestial Ephemeris Pole). Le pôle boréal coté Nord est très proche de l'étoile polaire et le pôle austral coté Sud est proche de la Croix du Sud. L'axe qui joint ces deux pôles et l'axe de rotation de la Terre sont parallèles (c'est en fait la même direction qu'on déplace parallèlement à elle-même pour la faire passer par l'origine de son choix). Cette direction est perpendiculaire au plan équatorial. Sur la voûte céleste les étoiles qui sont situées sur la trace de ce plan équatorial parcourent un grand cercle. Les autres étoiles parcourent, de chaque coté de ce grand cercle, des cercles concentriques parallèles d'autant plus petits que les étoiles sont proches des pôles célestes.
- **L'écliptique - les pôles écliptiques** : Dans l'antiquité, l'écliptique était la trajectoire du Soleil sur la sphère céleste centrée sur la Terre. Actuellement et plus précisément, le plan de l'écliptique est le plan qui contient la trajectoire du barycentre Terre-Lune autour du Soleil, (dans l'approximation où cette trajectoire se referme). La direction orthogonale à ce plan, perce la sphère céleste en deux points appelés pôles écliptiques.
- **Le point γ - point vernal - l'équinoxe** : L'axe de rotation de la Terre fait un angle d'environ $23^{\circ}26'$ avec l'axe des pôles écliptiques. Cet angle est appelé *obliquité de l'écliptique* et est noté ε . La perpendiculaire commune à l'axe des pôles célestes et des pôles écliptiques, qui est également la direction de l'intersection des plans écliptique et équatorial est appelée lignes des nœuds, ou ligne des équinoxes. Les points où elle perce la voûte céleste sont appelés points γ et γ' . Le point γ également appelé point vernal est celui qui correspond à la direction Terre-Soleil lors de l'équinoxe de printemps. Sur la voûte céleste, il correspond au nœud ascendant de l'orbite apparente du Soleil autour de la Terre, position où il coupe l'équateur céleste en passant du coté sud (où il se trouvait pendant l'hiver) au coté nord (où il se trouvera pendant l'été).

3.2.1 Les mouvements des directions et plans

Toutes ces directions et plans sont en mouvement dans le temps.

3.2.1.1 La précession

Le mouvement le plus célèbre est appelé la *précession des équinoxes*. C'est un mouvement périodique très lent lent d'environ 26000 ans de période, de grande amplitude, dans lequel l'axe de rotation de la Terre décrit un cône autour de l'axe des pôles écliptiques. Ce mouvement est le résultat d'un effet de gyroscopique lié à l'attraction du Soleil et de la Lune sur le bourrelet équatorial terrestre. Le pôle nord céleste décrit un cercle de rayon $\varepsilon = 23^\circ 26'$ autour du pôle nord écliptique. Actuellement le pôle nord céleste est au voisinage de l'étoile Polaire. Au 8^{ème} siècle il était au voisinage de l'étoile 32H de la constellation de la Girafe. Cette étoile était utilisée par les Vikings pour trouver le Nord. Il y a 4800 ans le pôle nord céleste était au voisinage d'Alpha du Dragon (Thuban) qui indiquait le Nord aux égyptiens de la 1^{ère} dynastie. Ce mouvement entraîne un déplacement du point γ d'environ 50" de degré par an (3.33 secondes de temps para an), lui faisant accomplir un tour complet de l'équateur céleste tous les 26000 ans environ. Le point vernal se trouvait dans l'antiquité dans la constellation du Bélier. Il est entré en -60 dans la constellation des Poissons et entrera en 2100 dans la constellation du Verseau.

Le mouvement de précession inclut aussi un mouvement de basculement extrêmement lentement (d'environ 47" d'arc par siècle) du plan de l'écliptique autour d'un axe qui est actuellement proche de l'axe des équinoxes, ce qui va entraîner temporairement une diminution l'obliquité de l'écliptique.

3.2.1.2 La nutation

L'axe de rotation de la Terre est également animé d'un mouvement de *nutation* périodique de plus faible amplitude et de période beaucoup plus courte (18.6 ans environ) appelé *oscillation de Bradley*. qui se superpose au précédent. Dans ce mouvement le pôle nord céleste décrit une ellipse d'environ 17" d'arc de demi grand axe et de 9" d'arc de demi petit axe autour de la position moyenne qui décrit le cercle de rayon ε .

3.2.1.3 Les mouvements du pôle nord instantané

Les pôles où l'axe de rotation de la Terre perce la croûte Terrestre bougent également. L'**IERS** (International Earth Rotation Service) définit en permanence la position du pôle nord instantané de la Terre. Un Nord conventionnel, nommé pôle nord CIO (Conventional International Origin) a été défini à partir d'une moyenne sur les années 1900 à 1905.

3.2.2 Les références moyennes et vraies

Comme ces directions et plans sont en mouvement, les références sont liées à une date. De plus comme les mouvements réels et instantanés sont complexes, on utilise des références liées à des directions ou plans moyens en négligeant certains mouvements. Ainsi on considère les éléments de référence suivants :

- **L'écliptique moyen de la date** : c'est le plan perpendiculaire au moment cinétique moyen du barycentre Terre-Lune dans son mouvement autour du Soleil, à une date donnée. Autrement dit, c'est le plan passant par le Soleil qui contient la partie de trajectoire du barycentre Terre-Lune centrée sur la position de ce barycentre à la date donnée. Plus simplement dit, la direction des pôles écliptiques est la normale au plan moyen de la trajectoire du barycentre Terre-Lune autour du Soleil. A notre niveau d'utilisation, le qualificatif de moyen interroge car on ne considère pas d'autre plan écliptique que celui-ci : on n'utilise pas un écliptique vrai de la date.
- **L'équateur céleste vrai de la date** : C'est le plan équatorial vrai, orthogonal à l'axe de rotation de la Terre, à la date considérée, compte tenu du mouvement de précession et de nutation de l'axe des pôles.
- **L'équateur céleste moyen de la date** : C'est le plan orthogonal à l'axe des pôles à une date donnée, débarrassé de son mouvement de nutation. seul le mouvement de précession est pris en compte.
- **L'équinoxe vrai de la date** : C'est la direction de la ligne des nœuds intersection de l'équateur vrai de la date et l'écliptique moyen de la date (on ne considère pas d'écliptique vrai).
- **L'équinoxe moyen de la date** : C'est la direction de la ligne des nœuds intersection de l'équateur moyen de la date et l'écliptique moyen de la date.

Ainsi, les directions ou orientations des axes, plans et repères sont affectés du qualificatif *moyen de la date* quand leur mouvement prend en compte la précession, mais pas la nutation. Ils sont affectés du qualificatif *vrai de la date* quand leur mouvement prend en compte la précession et la nutation.

3.3 Les principales coordonnées utilisées en astronomie

3.3.1 Les coordonnées équatoriales

La **Base Équatoriale** \mathcal{B}_C du système de coordonnées équatoriales a pour direction \vec{z}_C l'axe de rotation de la Terre, dirigé vers le pôle nord céleste boréal P_C et pour axe \vec{x}_C la direction vers le point γ . L'axe \vec{y}_C complète le trièdre orthonormé direct. Nous l'appelons également base céleste, d'où l'indice C de la base, car nous utilisons l'indice E pour la base écliptique que nous présentons ensuite.

C'est une des principales bases initiales utilisée pour situer les étoiles.

Les coordonnées sphériques d'une direction \vec{u} dans cette base sont l'*ascension droite* (traditionnellement exprimée en unités de temps de 0 à 24h) et la *déclinaison* (traditionnellement exprimée en degrés entre $\pm 90^\circ$).

$$\begin{cases} \alpha = \text{ascension droite} \\ \delta = \text{déclinaison} \end{cases}$$

Remarque : La direction \vec{x}_C sera parfois notée \vec{x}_γ .

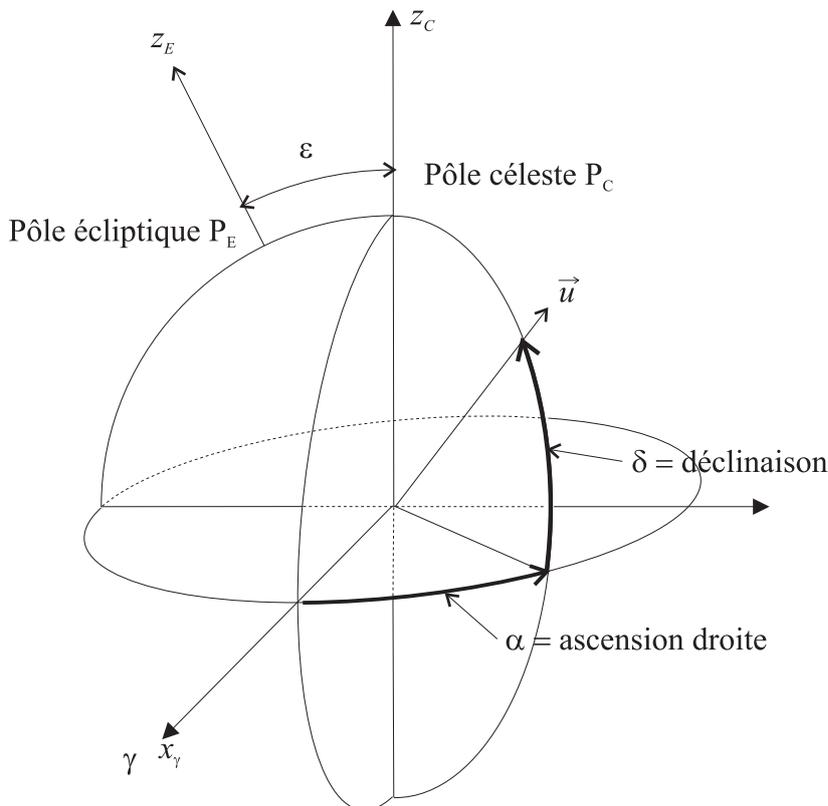


Figure 3.2: Repère équatorial

Le couple (α, δ) constitue les *coordonnées équatoriales* de la direction.

Attention : Section suivante 3.3.2, lire la remarque sur le signe de δ .

Dans la base \mathcal{B}_C les cosinus directeurs de la direction \vec{u} d'un astre de coordonnées (α, δ) s'écrivent simplement :

$$(u)_C = \begin{pmatrix} \cos \alpha \cos \delta \\ \sin \alpha \cos \delta \\ \sin \delta \end{pmatrix}$$

Les principaux repères équatoriaux. On distingue principalement :

- *Le repère équatorial moyen de la date* qui utilise l'équateur céleste moyen et l'équinoxe moyen de cette date (date a priori quelconque). Le repère géocentrique équatorial moyen de la date est désigné par le sigle **MOD** dans les documents de langue anglaise, pour **Mean (Equinox) of Date**, ou parfois MEME pour Mean Equator and Mean Equinox.
- *Le repère équatorial moyen d'une date de référence*, idem mais la date est une date de référence, par exemple J2000. Si on néglige des corrections d'alignement toutes inférieures à 10^{-7} radians, c'est-à-dire à 0.02 secondes d'arc, le repère géocentrique équatorial moyen J2000 correspond au repère géocentrique céleste de référence

GCRF (Geocentric Celestial Reference Frame) défini par l'IAU (International Astronomical Union) et l'IERS (International Earth Service Rotation).

- *Le repère équatorial vrai* qui utilise l'équateur céleste vrai et l'équinoxe vrai de cette date. Le repère géocentrique équatorial vrai de la date est désigné par le sigle **TOD** dans les documents de langue anglaise, pour **True (Equinox) of Date**, ou parfois TETE pour True Equator and True Equinox.

Remarques diverses :

- Dans nos formules tous les angles (y compris l'ascension droite) sont, sauf indications explicites contraires, exprimés en radians.
- Dans les repères géocentriques, le Soleil parcourt l'écliptique dans le sens direct. On note α_\odot l'ascension droite du méridien contenant le Soleil :

$$\alpha_\odot = \angle(\vec{x}_\gamma, \vec{x}_\odot)$$

3.3.2 Les coordonnées écliptiques

La **Base Écliptique** \mathcal{B}_E du système de coordonnées écliptiques a son axe \vec{z}_E dirigé vers le pôle de l'écliptique P_E et son axe \vec{x}_E dirigé vers le point vernal γ . L'axe \vec{y}_E complète le trièdre orthonormé direct. Les coordonnées sphériques d'une direction \vec{u} dans cette base sont la *longitude* et la *latitude écliptiques* traditionnellement exprimées en degrés.

$$\begin{cases} \lambda = \text{longitude écliptique} \\ \beta = \text{latitude écliptique} \end{cases}$$

Par la suite la direction \vec{x}_E sera souvent notée \vec{x}_γ .

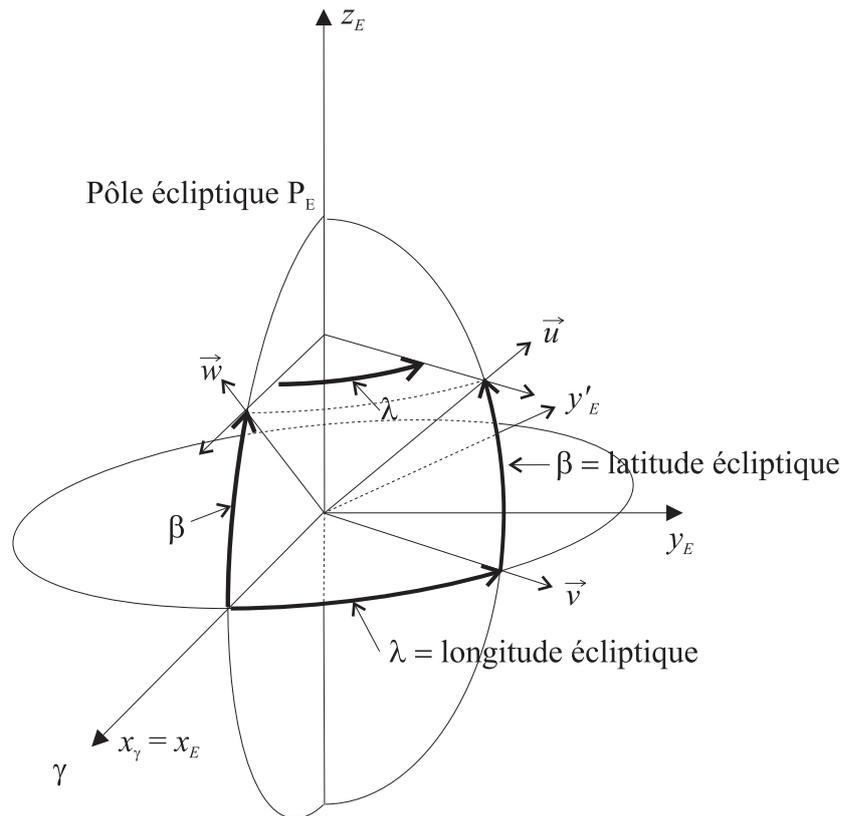


Figure 3.3: Repère écliptique

Le couple (λ, β) constitue les *coordonnées écliptiques* de la direction \vec{u} .

Ces angles sont également appelés *longitude céleste* et *latitude céleste*. Nous préférons *longitude écliptique* et *latitude écliptique*, qualificatif qui rappelle que la longitude est mesurée le long de l'écliptique et que la latitude est mesurée orthogonalement à l'écliptique.

Cette base est surtout utilisée pour repérer des objets du système solaire dans un repère d'origine le centre du Soleil pour les planètes, le centre de la Terre pour ses satellites, etc.

Les cosinus directeurs de la direction \vec{u} dans la base \mathcal{B}_E s'écrivent simplement :

$$(u)_E = \begin{pmatrix} \cos \lambda \cos \beta \\ \sin \lambda \cos \beta \\ \sin \beta \end{pmatrix}$$

Remarque sur les signe de β : Dans la rotation d'angle λ autour de l'axe \vec{z}_g l'axe \vec{x}_g devient l'axe \vec{v} et l'axe \vec{y}_g devient l'axe \vec{y}'_g . Le choix $\beta > 0$ vers le haut (coté $z > 0$) fait que l'axe \vec{v} se transforme en axe \vec{u} par la rotation d'angle β autour de l'axe de **direction opposée** à \vec{y}'_g . Il en est de même pour le signe de δ .

Les principaux repères écliptiques. On distingue principalement :

- *Le repère écliptique moyen de la date* qui utilise l'écliptique *moyen* et l'équinoxe *moyen* de cette date (date a priori quelconque).
- *Le repère écliptique moyen d'une date de référence*, idem mais pour une date de référence, par exemple J2000.
- *Le repère écliptique vrai* qui utilise l'écliptique **moyen** de la date et l'équinoxe *vrai* de cette date.

3.3.2.1 L'obliquité de l'écliptique

Les plans de l'équateur céleste et de l'écliptique font un angle dièdre ε appelé *obliquité de l'écliptique*. La valeur positive correspond à la rotation dans le sens direct autour de \vec{x}_γ de \vec{z}_C vers \vec{z}_E :

$$\varepsilon = \angle(\vec{z}_C, \vec{z}_E)$$

(ou bien à la rotation dans le sens rétrograde autour de \vec{x}_γ de \vec{z}_E vers \vec{z}_C).

On note $\bar{\varepsilon}$ *l'obliquité moyenne* qui est l'angle entre **écliptique moyen et équateur moyen pour une date** donnée.

Étant donné un jour julien J (temps universel ou dynamique, la différence n'étant pas significative pour l'obliquité), on note T le nombre de siècles juliens écoulés depuis J2000.0 :

$$T = \frac{J - 2451545}{36525}$$

L'obliquité moyenne $\bar{\varepsilon}$ est donnée à 1" près sur une période de 1000 ans par :

$$\bar{\varepsilon} = 23^\circ 26' 21''.448 - 46''.8150T - 0''.00059T^2 + 0''.001813T^3 \quad (3.6)$$

(attention aux mélanges d'unité dans cette expression !).

Dans la bibliothèque GNU Octave associée à ce document on trouvera la fonction `obliquity_dg` qui calcule cette valeur.

Rappelons que c'est un angle moyen qui ne prend pas en compte l'oscillation de Bradley (c'est-à-dire le mouvement de nutation). **L'obliquité vraie** est donnée par :

$$\varepsilon = \bar{\varepsilon} + \Delta\varepsilon$$

où la variation d'obliquité $\Delta\varepsilon$ due à la nutation est modélisé au paragraphe 3.5.1.1 par l'expression 3.22 reste inférieure à 9.8".

La base écliptique \mathcal{B}_E s'obtient à partir de la base équatoriale céleste \mathcal{B}_C par la rotation d'angle ε autour de \vec{x}_γ . Il en résulte que la matrice de changement de base R_{CE} qui permet de calculer les composantes dans la base initiale (composantes dans \mathcal{B}_C) à partir des composantes dans la base finale (composantes dans \mathcal{B}_E) s'écrit $R_{CE} = R_X(\varepsilon)$:

$$R_{CE} = R_X(\varepsilon) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varepsilon & -\sin \varepsilon \\ 0 & \sin \varepsilon & \cos \varepsilon \end{pmatrix}$$

telle que :

$$(V)_C = R_X(\varepsilon)(V)_E$$

Et dans le sens inverse, on utilise $R_{EC} = R_{CE}^T = R_X(-\varepsilon)$:

$$R_{EC} = R_X(-\varepsilon) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varepsilon & \sin \varepsilon \\ 0 & -\sin \varepsilon & \cos \varepsilon \end{pmatrix}$$

telle que :

$$(V)_E = R_X(-\varepsilon)(V)_C$$

Dans ces formules on utilisera l'obliquité moyenne $\bar{\varepsilon}$ pour des changements de bases entre bases moyennes et l'obliquité vraie ε pour des changement de bases entre bases vraies.

D'une manière générale, les changements de coordonnées se font entre des bases de même nature, à savoir soit des bases moyennes à la date donnée, soit des bases vraies à la date donnée, la date donnée étant éventuellement celle d'une époque de référence. On verra à partir de la section 3.4 comment on change de coordonnées entre des mêmes repères moyens considérés à différentes dates.

3.3.2.2 Coordonnées écliptiques versus équatoriales

Étant données les coordonnées équatoriales (α, δ) et écliptiques (λ, β) d'une même direction on a :

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha \cos \delta \\ \sin \alpha \cos \delta \\ \sin \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varepsilon & -\sin \varepsilon \\ 0 & \sin \varepsilon & \cos \varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \lambda \cos \beta \\ \sin \lambda \cos \beta \\ \sin \beta \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

soit :

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha \cos \delta \\ \sin \alpha \cos \delta \\ \sin \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \lambda \cos \beta \\ \cos \varepsilon \sin \lambda \cos \beta - \sin \varepsilon \sin \beta \\ \sin \varepsilon \sin \lambda \cos \beta + \cos \varepsilon \sin \beta \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

En considérant que $|\delta| \leq \pi/2$ on a $\cos \delta \geq 0$ d'où :

$$\begin{aligned} \delta &= \arcsin(\sin \varepsilon \sin \lambda \cos \beta + \cos \varepsilon \sin \beta) \\ \alpha &= \operatorname{atan2}(\cos \varepsilon \sin \lambda \cos \beta - \sin \varepsilon \sin \beta, \cos \lambda \cos \beta) \end{aligned} \quad (3.9)$$

Inversement :

$$\begin{pmatrix} \cos \lambda \cos \beta \\ \sin \lambda \cos \beta \\ \sin \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varepsilon & \sin \varepsilon \\ 0 & -\sin \varepsilon & \cos \varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha \cos \delta \\ \sin \alpha \cos \delta \\ \sin \delta \end{pmatrix}$$

soit

$$\begin{pmatrix} \cos \lambda \cos \beta \\ \sin \lambda \cos \beta \\ \sin \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha \cos \delta \\ \cos \varepsilon \sin \alpha \cos \delta + \sin \varepsilon \sin \delta \\ -\sin \varepsilon \sin \alpha \cos \delta + \cos \varepsilon \sin \delta \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

En considérant que $|\beta| \leq \pi/2$ on a $\cos \beta \geq 0$ d'où :

$$\begin{aligned} \beta &= \arcsin(-\sin \varepsilon \sin \alpha \cos \delta + \cos \varepsilon \sin \delta) \\ \lambda &= \operatorname{atan2}(\cos \varepsilon \sin \alpha \cos \delta + \sin \varepsilon \sin \delta, \cos \alpha \cos \delta) \end{aligned} \quad (3.11)$$

Remarque : Pour simplifier l'écriture nous avons utilisé dans ces formules la variable ε , mais comme nous l'avons signalé au paragraphe précédent, on utilise l'obliquité moyenne $\bar{\varepsilon}$ pour des changement de bases entre coordonnées dans des bases moyennes et l'obliquité vraie ε pour des changement de bases entre coordonnées dans des bases vraies.

Dans la bibliothèque GNU Octave associée à ce document on trouvera les fonctions `equa2ecli` et `ecli2equa` qui permettent de convertir les coordonnées équatoriales en coordonnées écliptiques et inversement.

Application aux coordonnées du Soleil

Ces relations s'appliquent aux coordonnées équatoriales $(\alpha_{\odot}, \delta_{\odot})$ et écliptiques $(\lambda_{\odot}, \beta_{\odot})$ de la direction Terre-Soleil, avec a priori $\beta_{\odot} = 0$ puisque cet axe appartient à l'écliptique, ce qui entraîne la relation entre les coordonnées équatoriales du Soleil :

$$\cos \varepsilon \sin \delta_{\odot} = \sin \varepsilon \sin \alpha_{\odot} \cos \delta_{\odot} \Rightarrow \tan \delta_{\odot} = \tan \varepsilon \sin \alpha_{\odot}$$

(même remarque que précédemment pour l'utilisation de ε ou $\bar{\varepsilon}$).

3.3.2.3 Calcul de la vitesse de variation des coordonnées écliptiques d'une étoile.

Les catalogues, qui fournissent les coordonnées équatoriales ou écliptiques des étoiles, donnent également la vitesse de variation de ces coordonnées. Mais généralement on ne trouve que les variations annuelles des coordonnées équatoriales et pas celles des coordonnées écliptiques. Si on désire calculer ces dernières, il faut les calculer à partir des autres. Pour cela dérivons la relation 3.10. Il vient :

$$\begin{pmatrix} -\dot{\lambda} \sin \lambda \cos \beta - \dot{\beta} \cos \lambda \sin \beta \\ \dot{\lambda} \cos \lambda \cos \beta - \dot{\beta} \sin \lambda \sin \beta \\ \dot{\beta} \cos \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dot{\alpha} \sin \alpha \cos \delta - \dot{\delta} \cos \alpha \sin \delta \\ (\dot{\alpha} \cos \alpha \cos \delta - \dot{\delta} \sin \alpha \sin \delta) \cos \varepsilon + \dot{\delta} \cos \delta \sin \varepsilon \\ -(\dot{\alpha} \cos \alpha \cos \delta - \dot{\delta} \sin \alpha \sin \delta) \sin \varepsilon + \dot{\delta} \cos \delta \cos \varepsilon \end{pmatrix}$$

et en combinant les 2 premières respectivement multipliées par $-\sin \lambda \cos \beta$ et $\cos \lambda \cos \beta$ pour éliminer $\dot{\beta}$, il vient :

$$\begin{aligned} \dot{\lambda} \cos^2 \beta &= \sin \lambda \cos \beta \left(\dot{\alpha} \sin \alpha \cos \delta + \dot{\delta} \cos \alpha \sin \delta \right) \\ &+ \cos \lambda \cos \beta \left(\cos \varepsilon \left(\dot{\alpha} \cos \alpha \cos \delta - \dot{\delta} \sin \alpha \sin \delta \right) + \sin \varepsilon \left(\dot{\delta} \cos \delta \right) \right) \end{aligned}$$

Remplaçons $\sin \lambda \cos \beta$ et $\cos \lambda \cos \beta$ par leurs valeurs tirées de 3.10. Il vient :

$$\begin{aligned} \dot{\lambda} \cos^2 \beta &= (\cos \varepsilon \sin \alpha \cos \delta + \sin \varepsilon \sin \delta) \left(\dot{\alpha} \sin \alpha \cos \delta + \dot{\delta} \cos \alpha \sin \delta \right) \\ &+ (\cos \alpha \cos \delta) \left(\cos \varepsilon \left(\dot{\alpha} \cos \alpha \cos \delta - \dot{\delta} \sin \alpha \sin \delta \right) + \sin \varepsilon \left(\dot{\delta} \cos \delta \right) \right) \end{aligned}$$

soit après factorisation et simplification des $\cos^2 + \sin^2 = 1$:

$$\begin{aligned} \dot{\lambda} &= \frac{\dot{\alpha} \cos \delta (\cos \varepsilon \cos \delta + \sin \varepsilon \sin \delta \sin \alpha) + \dot{\delta} \sin \varepsilon \cos \alpha}{\cos^2 \beta} \\ \dot{\beta} &= \frac{-\dot{\alpha} \sin \varepsilon \cos \alpha \cos \delta + \dot{\delta} (\sin \varepsilon \sin \alpha \sin \delta + \cos \varepsilon \cos \delta)}{\cos \beta} \end{aligned} \quad (3.12)$$

cette dernière relation étant obtenu directement à partir de la 3^{ème} ligne dérivée.

Connaissant les coordonnées équatoriales (α, δ) et leurs vitesses de variation $(\dot{\alpha}, \dot{\delta})$, ces 2 relations permettent d'obtenir les vitesses de variation des coordonnées écliptiques.

Remarque : Dans ces relations ε est l'obliquité moyenne car les coordonnées fournies dans les catalogues sont toujours des coordonnées dans des bases moyennes de l'époque de référence du catalogue.

3.3.3 Les coordonnées galactiques

La base \mathcal{B}_G du système de coordonnées écliptiques a son axe \vec{z}_G dirigé vers le pôle nord galactique qui, dans le référentiel de l'époque besselienne B1950.0 a pour coordonnées équatoriales :

$$\begin{cases} \alpha_{1950} = 192^\circ.25 \\ \delta_{1950} = 27^\circ.4 \end{cases}$$

Les coordonnées sphériques d'une direction \vec{u} dans cette base sont la *longitude et la latitude galactiques* traditionnellement exprimées en degrés.

$$\begin{cases} l = \text{longitude galactique} \\ b = \text{latitude galactique} \end{cases}$$

Le plan galactique (orthogonal à \vec{z}_G) et le plan équatorial B1950.0 se coupent selon une ligne des nœuds de cette époque. Le nœud ascendant est celui où les longitudes galactiques croissantes passent du côté sud au côté nord. La longitude galactique l de ce nœud ascendant vaut 33° .

Les cosinus directeurs de la direction \vec{u} dans la base \mathcal{B}_G s'écrivent simplement :

$$(u)_G = \begin{pmatrix} \cos l \cos b \\ \sin l \cos b \\ \sin b \end{pmatrix}$$

Coordonnées galactiques versus coordonnées équatoriales

Le passage d'une base équatoriale moyenne \mathcal{B}_C de l'époque B1950.0 au repère galactique \mathcal{B}_g se fait par les trois rotations successives suivantes :

- rotation $R_Z(\alpha_{1950})$ qui transforme \mathcal{B}_C en B_1 ,
- rotation $R_Y(\pi/2 - \delta_{1950})$ qui transforme B_1 en B_2 ,
- rotation $R_Z(57^\circ)$ qui transforme B_2 en B_g (avec $57^\circ = 90^\circ - 33^\circ$).

Il en résulte :

$$R_{Cg} = R_Z(\alpha_{1950})R_Y(\pi/2 - \delta_{1950})R_Z(57^\circ)$$

tel que :

$$(u)_C = R_{Cg}(u)_g$$

D'où :

$$R_Z(57^\circ)(u)_g = R_Y^\top(\pi/2 - \delta_{1950})R_Z(-\alpha_{1950})(u)_C$$

En remarquant que :

$$R_Z(57^\circ)(u)_g = \begin{pmatrix} \cos(l + 57^\circ) \cos b \\ \sin(l + 57^\circ) \cos b \\ \sin b \end{pmatrix}$$

et :

$$R_Z(-\alpha_{1950})(u)_C = \begin{pmatrix} \cos(\alpha - \alpha_{1950}) \cos \delta \\ \sin(\alpha - \alpha_{1950}) \cos \delta \\ \sin \delta \end{pmatrix}$$

il vient :

$$\begin{pmatrix} \cos(l + 57^\circ) \cos b \\ \sin(l + 57^\circ) \cos b \\ \sin b \end{pmatrix} = R_Y^\top(\pi/2 - \delta_{1950}) \begin{pmatrix} \cos(\alpha - \alpha_{1950}) \cos \delta \\ \sin(\alpha - \alpha_{1950}) \cos \delta \\ \sin \delta \end{pmatrix}$$

soit :

$$\begin{pmatrix} \cos(l + 57^\circ) \cos b \\ \sin(l + 57^\circ) \cos b \\ \sin b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \delta_{1950} & 0 & -\cos \delta_{1950} \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos \delta_{1950} & 0 & \sin \delta_{1950} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\alpha - \alpha_{1950}) \cos \delta \\ \sin(\alpha - \alpha_{1950}) \cos \delta \\ \sin \delta \end{pmatrix}$$

En considérant que $|b| \leq \pi/2$ on a $\cos b \geq 0$ d'où :

$$\begin{aligned} l + 57^\circ &= \text{atan2}[\sin(\alpha - \alpha_{1950}) \cos \delta, \sin \delta_{1950} \cos(\alpha - \alpha_{1950}) \cos \delta - \cos \delta_{1950} \sin \delta] \\ b &= \arcsin[\cos \delta_{1950} \cos(\alpha - \alpha_{1950}) \cos \delta + \sin \delta_{1950} \sin \delta] \end{aligned}$$

et réciproquement :

$$\begin{aligned} \alpha - \alpha_{1950} &= \text{atan2}[\sin(l + 57^\circ) \cos b, \sin \delta_{1950} \cos(l + 57^\circ) \cos b + \cos \delta_{1950} \sin b] \\ \delta &= \arcsin[-\cos \delta_{1950} \cos(l + 57^\circ) \cos b + \sin \delta_{1950} \sin b] \end{aligned}$$

Dans la bibliothèque GNU Octave associée à ce document on trouvera les fonctions `equa2gala` et `gala2equa` qui permettent de convertir les coordonnées équatoriales en galactiques et inversement.

3.4 Correction de précession - Changements d'époque de référence pour des coordonnées moyennes

Les catalogues d'étoiles fournissent les coordonnées des étoiles dans un repère de référence (équatorial ou écliptique ou galactique) dont les directions de base correspondent à une époque donnée (B1950.0 ou J2000.0 ou autre). Ils fournissent également les variations annuelles des coordonnées de ces étoiles dues à leur mouvement propre. Si on veut les coordonnées d'une étoile dans le même repère de référence mais défini à une autre époque, on modifie d'abord les coordonnées de cette étoile dans son repère initial en prenant en compte son mouvement propre, puis on modifie les coordonnées obtenues pour prendre en compte le changement de repère dû au changement d'époque de référence.

Nous donnons dans cette section des formules matricielles relativement précises pour effectuer ces changements de coordonnées et prendre ainsi en compte des grands intervalles de temps entre les époques de référence. Nous donnons dans la section suivante des formules simplifiées qu'on peut appliquer directement sur les angles lorsque les différentes époques sont plus rapprochées.

3.4.1 Modélisation des mouvements des éléments de référence

Nous venons de voir qu'il existe de très nombreux repères de références qui diffèrent par les directions des axes de référence utilisés et par les dates auxquelles sont considérées les directions de ces axes. Pour faire les changement de coordonnées entre les différents repères de différentes époques, on a modélisé les valeurs prises par divers angles significatifs sous forme des polynômes en fonction du temps, avec parfois une modélisation des coefficients de ces polynômes en fonction du temps. Nous donnons ci-après les expressions de ceux qui sont le plus fréquemment utilisés.

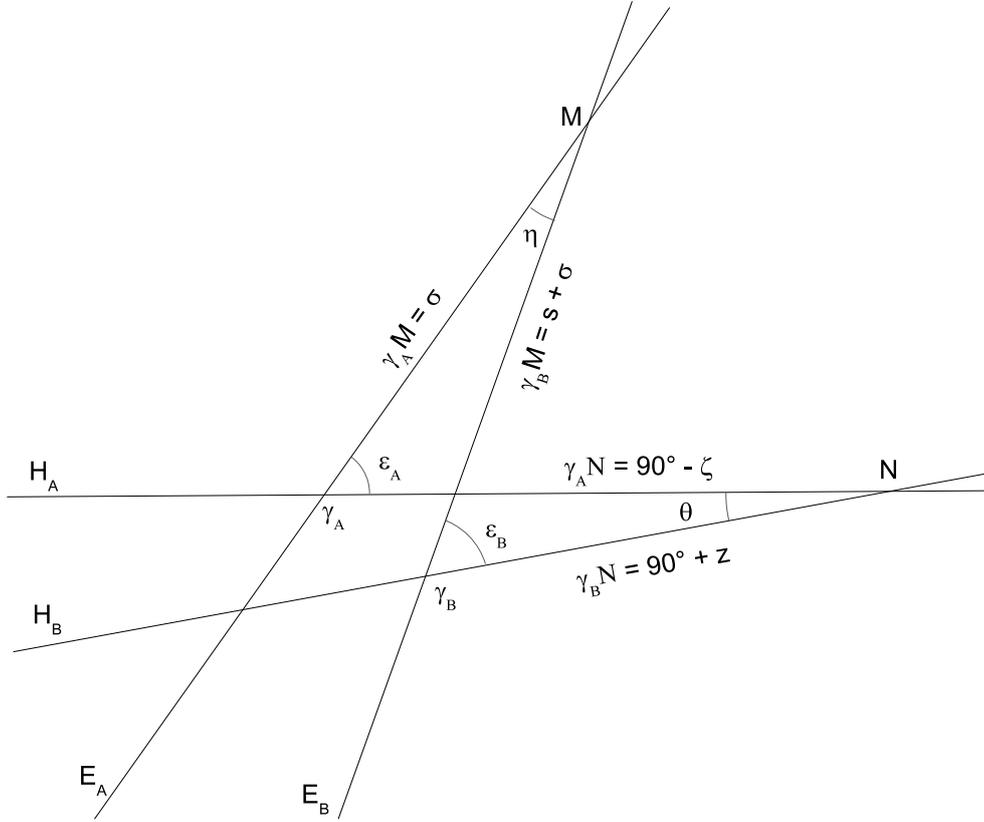


Figure 3.4: Écliptiques et équateurs moyens à deux époques différentes

Sur la figure 3.4 nous avons fait figurer sur la sphère céleste les traces partielles E_A et E_B de l'écliptique moyen pour deux époques différentes t_A et t_B , ainsi que les traces partielles H_A et H_B des équateurs moyens pour ces deux époques. Figurent aussi les points vernaux moyens $\gamma_A = H_A \cap E_A$ et $\gamma_B = H_B \cap E_B$ de ces époques et les angles d'obliquité ε_A et ε_B de ces époques.

3.4.1.1 Mouvement de l'écliptique moyen :

Les deux grands cercles E_A et E_B se coupent en M et nous appelons η l'angle que font entre eux les plans éclipticaux moyens des époques t_A et t_B . Si O (point quelconque non précisé) est l'origine de la sphère céleste le mouvement de l'écliptique entre t_A et t_B est une rotation d'angle η autour de l'axe OM . A l'époque t_A la longitude écliptique de OM qui est l'arc $\widehat{\gamma_A M}$ sera noté σ et à l'époque t_B l'arc $\widehat{\gamma_B M}$ sera noté $s + \sigma$.

Notons JD_A la date julienne de t_A et JD_B la date julienne de t_B et introduisons T le temps écoulé de J2000.0 à t_A exprimé en siècles juliens et d le temps écoulé de t_A à t_B exprimé également en siècles juliens :

$$T = \frac{JD_A - 2451545}{36525} \text{ et } d = \frac{JD_B - JD_A}{36525}$$

Les formules ci-après fournissent alors les valeurs des angles η , σ et s (tirées de [5]) :

$$\begin{aligned} \eta &= (47.0029 - 0.06603T + 0.000598T^2)d + (-0.03302 + 0.000598T)d^2 + 0.00006d^3 \\ \sigma &= 629554.982 + 3289.4789T + 0.60622T^2 - (869.8089 + 0.50491T)d + 0.03536d^2 \\ s &= (5029.0966 + 2.22226T - 0.000042T^2)d + (1.11113 - 0.000042T)d^2 - 0.000006d^3 \end{aligned} \quad (3.13)$$

Ces valeurs sont *exprimées en secondes d'arc* et l'échelle des *temps* est celle *des éphémérides* (mais l'influence du ΔT est négligeable).

L'angle η est extrêmement petit (de l'ordre de $47''$ par siècle), ce qui fait que E_A et E_B sont pratiquement confondus et l'arc $\widehat{\gamma_A\gamma_B}$ est pratiquement égal à $-s$. Le mouvement principal de la précession des équinoxes est ainsi un mouvement rétrograde le long de l'écliptique du point γ de l'ordre de $50.29''$ par an.

3.4.1.2 Mouvement de l'équateur moyen

Les deux grands cercles équatoriaux H_A et H_B se coupent en N et nous appelons θ l'angle que font entre eux les plans équateurs moyens des époques t_A et t_B . Le mouvement de l'équateur moyen entre t_A et t_B est une rotation d'angle θ autour de l'axe ON . A l'époque t_A l'ascension droite de ON qui est l'arc $\widehat{\gamma_A N}$ sera noté $90^\circ - \zeta$ et à l'époque t_B l'arc $\widehat{\gamma_B N}$ sera noté $90^\circ + z$.

Avec les mêmes notations que précédemment pour T et d , on a les valeurs suivantes pour ζ , θ et z (tirées de [5]) :

$$\zeta = (2306.2181 + 1.39656T - 0.000139T^2)d + (0.30188 - 0.000344T)d^2 + 0.017998d^3 \quad (3.14)$$

$$z = (2306.2181 + 1.39656T - 0.000139T^2)d + (1.09468 + 0.000066T)d^2 + 0.018203d^3 \quad (3.15)$$

$$\theta = (2004.3109 - 0.85330T - 0.000217T^2)d - (0.42665 + 0.000217T)d^2 - 0.041883d^3 \quad (3.16)$$

Ces valeurs sont *exprimées en secondes d'arc* et l'échelle des *temps* est celle *des éphémérides* (mais l'influence du ΔT est négligeable).

On remarquera qu'en un an, ces rotations correspondent à un déplacement du point γ moyen de $-(z + \zeta) = -46''.12$ en ascension droite et de $-\theta = -20''.04$ en hauteur. Autrement une étoile fixe situé au point γ (de coordonnées équatoriales nulles) aura pour coordonnées équatoriales une année plus tard $\alpha \simeq 46''.12$ et $\delta \simeq 20''.04$. L'arc tangente de ce déplacement fait 23° , ce qui le situe le long de l'écliptique. Son module égal à $\sqrt{46.12^2 + 20.04^2} = 50''.28$ par an est bien la précession *rétrograde* du point γ le long de l'écliptique.

L'effet du principal déplacement du point γ ($-46''$ de degré en ascension droite) sur les coordonnées des étoiles est que leurs ascensions droites *de la date* augmentent d'environ 3 secondes d'heure par an ($46''/15$).

3.4.2 Changement d'époque de référence pour des coordonnées équatoriales moyennes

La transformation d'une base équatoriale initiale \mathcal{B}_A (généralement relative à J2000) en base écliptique finale \mathcal{B}_B (généralement relative à la date courante) se fait au moyen des 3 rotations successives suivantes : On transforme \mathcal{B}_A en \mathcal{B}'_1 par une rotation d'angle $\pi/2 - \zeta$ autour de Oz_A qui amène $O\gamma_A$ selon $ON = Ox'_1$, suivie d'une rotation d'angle θ autour de Ox'_1 qui transforme \mathcal{B}'_1 en \mathcal{B}'_2 et le plan H_A en H_B , avec $Ox'_1 = Ox'_2 = ON$ inchangé, suivie d'une dernière rotation d'angle $-(\pi/2 + z)$ autour de l'axe Oz'_2 qui amène \mathcal{B}'_2 en \mathcal{B}_B et $Ox'_2 = ON$ selon $O\gamma_B$:

$$R_{AB} = R_Z(\pi/2 - \zeta) R_X(\theta) R_Z(-\pi/2 - z)$$

On simplifie ces rotations en transformant \mathcal{B}_A en \mathcal{B}_1 par une rotation d'angle $-\zeta$ autour de Oz_A qui amène $O\gamma_A$ selon Ox_1 avec maintenant $Oy_1 = ON$. La rotation suivante d'angle θ se fait autour de Oy_1 qui transforme \mathcal{B}_1 en \mathcal{B}_2 et le plan H_A en H_B , avec $Oy_1 = Oy_2 = ON$ inchangé. La dernière rotation d'angle $-z$ autour de l'axe Oz_2 qui amène \mathcal{B}_2 en \mathcal{B}_B ramène Ox_2 selon $O\gamma_B$:

$$R_{AB} = R_Z(-\zeta) R_Y(\theta) R_Z(-z)$$

Ces rotations sont représentées sur la figure 3.5.

En prenant les rotations inverses dans l'ordre d'écriture inverse, on obtient la matrice R_{BA} qui permet de calculer l'expression des cosinus directeurs d'une direction \vec{V} dans la base \mathcal{B}_B en fonction de leurs expressions dans la base \mathcal{B}_A :

$$(V)_B = R_{BA}(V)_A$$

avec :

$$R_{BA} = R_Z(z) R_Y(-\theta) R_Z(\zeta)$$

Dans les changements de base géocentriques effectués pour ramener des coordonnées inertielles à des coordonnées liées à la Terre, \mathcal{B}_A est la base de départ, base du repère géocentrique équatorial moyen J2000 qui peut être considéré comme étant le repère géocentrique céleste de référence (**GCRF**) et \mathcal{B}_B est la première base intermédiaire, base du repère géocentrique équatorial moyen de la date courante (repère **MOD** : Mean of Date). La matrice R_{BA} est généralement notée **P**, première lettre de précession :

$$P(t, t_0) = R_Z(z) R_Y(-\theta) R_Z(\zeta)$$

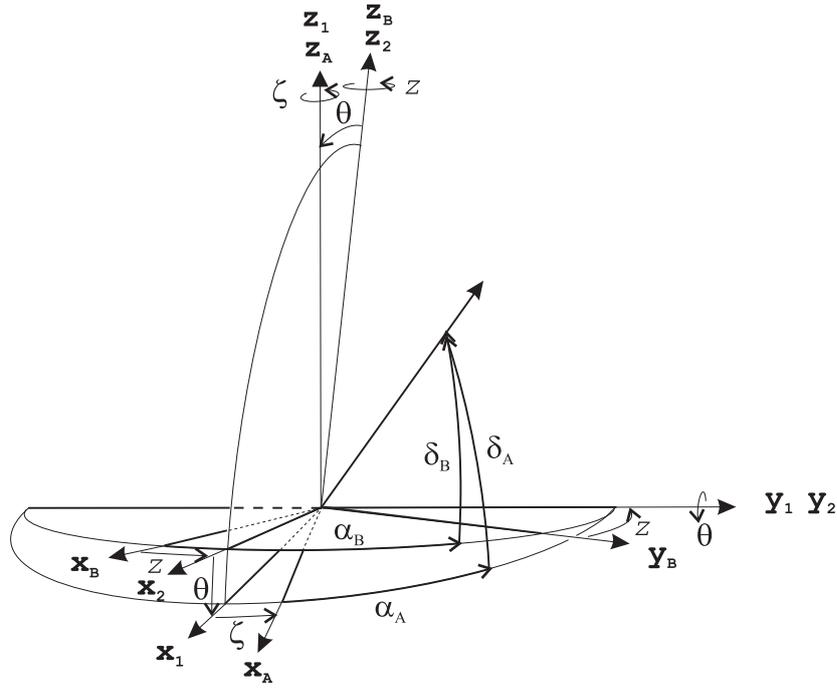


Figure 3.5: Changement de repère équatorial

Pour établir les relations entre les coordonnées angulaires, considérons les cosinus directeurs d'une direction \vec{V} dans B_2 :

$$\begin{aligned}
 (V)_2 &= R_Z(\zeta) (V)_A \\
 &= \begin{pmatrix} \cos \zeta & -\sin \zeta & 0 \\ \sin \zeta & \cos \zeta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \delta_A \cos \alpha_A \\ \cos \delta_A \sin \alpha_A \\ \sin \delta_A \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \cos \delta_A \cos \alpha_A \cos \zeta - \cos \delta_A \sin \alpha_A \sin \zeta \\ \cos \delta_A \cos \alpha_A \sin \zeta + \cos \delta_A \sin \alpha_A \cos \zeta \\ \sin \delta_A \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \cos \delta_A \cos(\alpha_A + \zeta) \\ \cos \delta_A \sin(\alpha_A + \zeta) \\ \sin \delta_A \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Il était évident que dans B_2 les coordonnées célestes étaient (α_2, δ_A) avec $\alpha_2 = \alpha_A + \zeta$. Dans B_1 les cosinus directeurs de \vec{V} sont :

$$\begin{aligned}
 (V)_1 &= R_Z(-z) (V)_B \\
 &= \begin{pmatrix} \cos z & \sin z & 0 \\ -\sin z & \cos z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \delta_B \cos \alpha_B \\ \cos \delta_B \sin \alpha_B \\ \sin \delta_B \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \cos \delta_B \cos(\alpha_B - z) \\ \cos \delta_B \sin(\alpha_B - z) \\ \sin \delta_B \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Il était évident que dans B_1 les coordonnées célestes étaient (α_1, δ_B) avec $\alpha_B = \alpha_1 + z$. Or $(V)_1 = R_Y(-\theta) (V)_2$, c'est-à-dire :

$$\begin{pmatrix} \cos \delta_B \cos(\alpha_B - z) \\ \cos \delta_B \sin(\alpha_B - z) \\ \sin \delta_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \delta_A \cos(\alpha_A + \zeta) \\ \cos \delta_A \sin(\alpha_A + \zeta) \\ \sin \delta_A \end{pmatrix} \quad (3.17)$$

soit :

$$\begin{aligned}
 \cos \delta_B \cos(\alpha_B - z) &= A_1 = \cos \theta \cos \delta_A \cos(\alpha_A + \zeta) - \sin \theta \sin \delta_A \\
 \cos \delta_B \sin(\alpha_B - z) &= B_1 = \cos \delta_0 \sin(\alpha_A + \zeta) \\
 \sin \delta_B &= C_1 = \sin \theta \cos \delta_A \cos(\alpha_A + \zeta) + \cos \theta \sin \delta_A
 \end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned}\alpha_B &= z + \text{Atan2}(B_1, A_1) \\ \delta_B &= \arcsin C_1\end{aligned}$$

Rappelons qu'avant de changer les coordonnées équatoriales, il faut d'abord les corriger dans le repère initial en utilisant leurs variations annuelles.

Remarque : Si c'est α_A et δ_A qui sont inconnues et α_B et δ_B qui sont connus, on utilisera :

$$\begin{pmatrix} \cos \delta_A \cos(\alpha_A + \zeta) \\ \cos \delta_A \sin(\alpha_A + \zeta) \\ \sin \delta_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \delta_B \cos(\alpha_B - z) \\ \cos \delta_B \sin(\alpha_B - z) \\ \sin \delta_B \end{pmatrix} \quad (3.18)$$

soit :

$$\begin{aligned}\cos \delta_A \cos(\alpha_A + \zeta) &= A_2 = \cos \theta \cos \delta_B \cos(\alpha_B - z) + \sin \theta \sin \delta_B \\ \cos \delta_A \sin(\alpha_A + \zeta) &= B_2 = \cos \delta_B \sin(\alpha_B - z) \\ \sin \delta_A &= C_2 = -\sin \theta \cos \delta_B \cos(\alpha_B - z) + \cos \theta \sin \delta_B\end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned}\alpha_A &= -\zeta + \text{Atan2}(B_2, A_2) \\ \delta_A &= \arcsin C_2\end{aligned}$$

Dans la bibliothèque GNU Octave associée à ce document on trouvera la fonction `chDateCoorEqua` de la fonction qui permet de faire ces changements de coordonnées.

3.4.3 Changement d'époque de référence pour les coordonnées écliptiques moyennes

La transformation d'une base écliptique initiale \mathcal{B}_A en base écliptique finale \mathcal{B}_B se fait au moyen des 3 rotations successives suivantes : On transforme \mathcal{B}_A en \mathcal{B}_1 par une rotation d'angle σ autour de Oz_A qui amène $O\gamma_A$ selon $OM = Ox_1$, suivie d'une rotation d'angle η autour de Ox_1 qui transforme \mathcal{B}_1 en \mathcal{B}_2 et le plan E_A en E_B , avec $Ox_1 = Ox_2 = OM$ inchangé, suivie d'une dernière rotation d'angle $-(\sigma + s)$ autour de l'axe Oz_2 qui amène \mathcal{B}_2 en \mathcal{B}_B et $Ox_2 = OM$ selon $O\gamma_B$:

$$R_{AB} = R_Z(\sigma)R_X(\eta)R_Z(-\sigma - s)$$

En prenant les rotations inverses dans l'ordre d'écriture inverse, on obtient la matrice R_{BA} qui permet de calculer l'expression des cosinus directeurs d'une direction \vec{V} dans la base \mathcal{B}_B en fonction de leurs expressions dans la base \mathcal{B}_A :

$$(V)_B = R_{BA}(V)_A$$

avec :

$$R_{BA} = R_Z(s + \sigma)R_X(-\eta)R_Z(-\sigma)$$

Pour établir les relations entre les coordonnées angulaires, sans détailler les calculs comme au paragraphe précédent, il est évident que dans \mathcal{B}_2 les coordonnées écliptiques de \vec{V} sont $(\lambda_2, \beta_2) = (\lambda_A - \sigma, \beta_A)$ et que dans \mathcal{B}_1 les coordonnées écliptiques de \vec{V} sont $(\lambda_1, \beta_1) = (\lambda_B - \sigma - s, \beta_B)$. Or $(V)_1 = R_X(\eta)(V)_2$, c'est-à-dire :

$$\begin{pmatrix} \cos \beta_B \cos(\lambda_B - \sigma - s) \\ \cos \beta_B \sin(\lambda_B - \sigma - s) \\ \sin \beta_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \eta & \sin \eta \\ 0 & -\sin \eta & \cos \eta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \beta_A \cos(\lambda_A - \sigma) \\ \cos \beta_A \sin(\lambda_A - \sigma) \\ \sin \beta_A \end{pmatrix}$$

soit :

$$\begin{aligned}\cos \beta_B \cos(\lambda_B - \sigma - s) &= A_3 = \cos \beta_A \cos(\lambda_A - \sigma) \\ \cos \beta_B \sin(\lambda_B - \sigma - s) &= B_3 = \cos \eta \cos \beta_A \sin(\lambda_A - \sigma) + \sin \eta \sin \beta_A \\ \sin \beta_B &= C_3 = -\sin \eta \cos \beta_A \sin(\lambda_A - \sigma) + \cos \eta \sin \beta_A\end{aligned}$$

d'où :

$$\lambda_B - \sigma - s = \text{Atan2}(B_3, A_3)$$

et finalement :

$$\begin{aligned}\lambda_B &= s + \sigma + \text{Atan2}(B_3, A_3) \\ \beta_B &= \arcsin C_3\end{aligned}$$

Rappelons que comme dans le cas de changement de bases pour les coordonnées équatoriales, il faut d'abord corriger les coordonnées écliptiques dans le repère initial en utilisant leurs variations annuelles. Si elles ne sont pas fournies et qu'on connaît les variations annuelles des coordonnées équatoriales, on peut calculer celles des coordonnées écliptiques par les formules 3.12.

Remarque : Si c'est λ_A et β_A qui sont inconnues et λ_B et β_B qui sont connus, on utilisera :

$$\begin{pmatrix} \cos \beta_A \cos(\lambda_A - \sigma) \\ \cos \beta_A \sin(\lambda_A - \sigma) \\ \sin \beta_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \eta & -\sin \eta \\ 0 & \sin \eta & \cos \eta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \beta_B \cos(\lambda_B - \sigma - s) \\ \cos \beta_B \sin(\lambda_B - \sigma - s) \\ \sin \beta_B \end{pmatrix}$$

soit :

$$\begin{aligned}\cos \beta_A \cos(\lambda_A - \sigma) &= A_4 = \cos \beta_B \cos(\lambda_B - \sigma - s) \\ \cos \beta_A \sin(\lambda_A - \sigma) &= B_4 = \cos \eta \cos \beta_B \sin(\lambda_B - \sigma - s) - \sin \eta \sin \beta_B \\ \sin \beta_A &= C_4 = \sin \eta \cos \beta_B \cos(\lambda_B - \sigma - s) + \cos \eta \sin \beta_B\end{aligned}$$

d'où :

$$\lambda_A - \sigma = \text{Atan2}(B_4, A_4)$$

et finalement :

$$\begin{aligned}\lambda_A &= \sigma + \text{Atan2}(B_4, A_4) \\ \beta_A &= \arcsin C_4\end{aligned}$$

Dans la bibliothèque GNU Octave associée à ce document on trouvera la fonction `chDateCoorEcli` qui permet de faire ce changement de coordonnées.

3.4.4 Correction directe approchée des coordonnées équatoriales moyennes d'une étoile

Il s'agit ici de prendre en compte un faible décalage temporel entre la date actuelle et la date des données d'un catalogue. Au lieu d'utiliser les formules présentées aux paragraphes précédents, on utilise des formules simplifiées obtenues en linéarisant les précédentes.

A partir de la dernière ligne de 3.17 on peut écrire :

$$\sin \delta_B = \sin \theta \cos \delta_A \cos(\alpha_A + \zeta) + \cos \theta \sin \delta_A$$

L'angle correctif θ étant supposé petit, on fait l'approximation $\cos \theta \simeq 1$ et $\sin \theta \simeq \theta$, d'où :

$$\sin \delta_B - \sin \delta_A = \theta \cos \delta_A \cos(\alpha_A + \zeta)$$

soit :

$$2 \sin \frac{\delta_B - \delta_A}{2} \cos \frac{\delta_B + \delta_A}{2} = \theta \cos \delta_A \cos(\alpha_A + \zeta)$$

et en faisant les approximations $2 \sin \frac{\delta_B - \delta_A}{2} \simeq \delta_B - \delta_A$, $\cos \frac{\delta_B + \delta_A}{2} \simeq \cos \delta_A$ et $\cos(\alpha_A + \zeta) \simeq \cos \alpha_A$, il vient :

$$\delta_B - \delta_A \simeq \theta \cos \alpha_A \tag{3.19}$$

A partir des 2 premières lignes de 3.17 on peut écrire :

$$\tan(\alpha_B - z) = \frac{\cos \delta_A \sin(\alpha_A + \zeta)}{\cos \theta \cos \delta_A \cos(\alpha_A + \zeta) - \sin \theta \sin \delta_A}$$

Au petit angle θ , il vient :

$$\begin{aligned}\tan(\alpha_B - z) &\simeq \frac{\sin(\alpha_A + \zeta)}{\cos(\alpha_A + \zeta) - \theta \tan \delta_A} \simeq \frac{\tan(\alpha_A + \zeta)}{1 - \theta \frac{\tan \delta_A}{\cos(\alpha_A + \zeta)}} \\ &\simeq \tan(\alpha_A + \zeta) \left(1 + \theta \frac{\tan \delta_A}{\cos(\alpha_A + \zeta)} \right)\end{aligned}$$

d'où :

$$\tan(\alpha_B - z) - \tan(\alpha_A + \zeta) \simeq \theta \frac{\tan(\alpha_A + \zeta) \tan \delta_A}{\cos(\alpha_A + \zeta)}$$

soit :

$$\frac{\sin(\alpha_B - \alpha_A - z - \zeta)}{\cos(\alpha_B - z) \cos(\alpha_A + \zeta)} \simeq \theta \frac{\tan(\alpha_A + \zeta) \tan \delta_A}{\cos(\alpha_A + \zeta)}$$

En faisant les approximations $\sin(\alpha_B - \alpha_A - z - \zeta) \simeq \alpha_B - \alpha_A - z - \zeta$, et $\tan(\alpha_A + \zeta) \cos(\alpha_B - z) \simeq \sin \alpha_A$ il vient :

$$\alpha_B - \alpha_A \simeq z + \zeta + \theta \sin \alpha_A \tan \delta_A \quad (3.20)$$

Les expressions 3.19 et 3.20 sont utilisées pour exprimer les variations **annuelles** en ascension droite $\Delta\alpha$ et en déclinaison $\Delta\delta$. Pour les obtenir dans les expressions 3.14, 3.15 et 3.16 de z , ζ et θ on ne prend que le terme de degré 1 en d avec $d = 0.01$, et on pose $m = (z + \zeta)/100$ et $n = \theta/100$. Ainsi, les variations annuelles en ascension droite et en déclinaison s'écrivent :

$$\begin{aligned} \Delta\alpha &\simeq m + n \sin \alpha \tan \delta \\ \Delta\delta &\simeq n \cos \alpha \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned} m &= 46.124362 + 0.0279312T - 0.00000278T^2 \\ n &= 20.043109 - 0.0085330T - 0.00000217T^2 \end{aligned}$$

quand on exprime les variations **annuelles** $\Delta\alpha$ et $\Delta\delta$ en **secondes d'arc**, T étant l'époque du calcul exprimé en siècles juliens par rapport à J2000 et l'échelle des **temps** est celle **des éphémérides** (mais l'influence du ΔT est négligeable).

Exercice : La dérive en longitude écliptique du point γ

Nous avons vu au paragraphe 3.4.3 que la variation de l'angle s de l'équation 3.13 correspondait à la dérive en longitude écliptique du point γ . On peut retrouver une valeur approchée de cette expression à partir des formules des variations $\Delta\alpha$ et $\Delta\delta$ établies ci-avant. En appliquant ces variations pour une étoile fixe située dans la direction du point γ (avec $\alpha = \delta = 0$), on obtient $\Delta\alpha = m$ et $\Delta\delta = n$ comme variations **séculaires** de ses coordonnées équatoriales. En projetant ces deux variations sur l'écliptique, incliné de ε_0 sur l'équateur (expression 3.6), on obtient l'expression suivante pour la précession générale p par siècle le long de l'écliptique pour cette étoile :

$$p = m \cos \bar{\varepsilon} + n \sin \bar{\varepsilon}$$

Le résultat trouvé correspond au terme s de l'expression 3.13 en ne retenant que le terme de degré 1 en d de son expression. En prenant $d = 0.01$ (siècle julien depuis J2000) l'expression 3.13 fournit directement :

$$p = 50.290966 + 0.0222226T - 0.00000042T^2$$

exprimé en secondes d'arc avec T en exprimé siècles juliens depuis J2000 (échelle des temps des éphémérides). Le déplacement du point γ se faisant en sens inverse, il rétrograde sur l'écliptique.

3.5 Correction de nutation - Les coordonnées vraies

La composante principale du mouvement de nutation de l'axe des pôles céleste est une oscillation périodique rapide (18.6 ans) découverte par Bradley en 1748. De par le mouvement de précession, le pôle céleste parcourt sur la sphère céleste en environ 26000 ans un cercle de $23^\circ 26'$ de rayon. La nutation superpose à ce mouvement circulaire de grande amplitude un petit parcours elliptique de 18.6 ans de période avec un demi petit axe de $9''$ d'amplitude perpendiculaire au parcours de précession (augmentant ou diminuant l'obliquité) et un demi grand axe de $17''$ d'amplitude s'ajoutant ou se retranchant à la précession. La combinaison du grand mouvement lent de précession et du petit mouvement rapide de nutation produit est mouvement du pôle céleste selon un cercle festonné.

3.5.1 Modèles du mouvement de nutation

Ce mouvement de nutation de l'axe des pôles céleste peut être modélisé par deux rotations :

- une rotation d'un angle noté $\Delta\varepsilon$ autour de la ligne de l'équinoxe moyen à la date considérée, dans le sens rétrograde. Le *sens rétrograde a été choisi de manière à ce que $\Delta\varepsilon$ vienne s'ajouter* à l'obliquité moyenne $\bar{\varepsilon}$ (expression 3.6) pour fournir l'obliquité vraie :

$$\varepsilon = \bar{\varepsilon} + \Delta\varepsilon$$

- une variation d'un angle noté $\Delta\psi$ autour de l'axe des pôles écliptiques, dans le sens *rétrograde*. La longitude écliptique du pôle Nord céleste passe de sa valeur moyenne fixe de 90° (puisque par définition l'équinoxe moyen est orthogonal à l'axe des pôles célestes) à une valeur vraie valant $90^\circ - \Delta\psi$.

3.5.1.1 Modèle approché

A une seconde d'arc près, on a les expressions approximatives suivantes :

$$\Delta\psi = -(17.2 + 0.01742T) \sin \Omega - (1.3 + 0.00016T) \sin 2L \quad (3.21)$$

$$\Delta\varepsilon = (9.2 + 0.00089T) \cos \Omega + (0.6 - 0.00031T) \cos 2L \quad (3.22)$$

où $\Delta\varepsilon$ et $\Delta\psi$ sont exprimées en secondes d'arc, où T est le nombre de *siècles* écoulés depuis J2000.0 (échelle des temps des éphémérides, mais l'influence du ΔT est négligeable) et où L est la *longitude moyenne du Soleil* et où Ω est la *longitude du nœud ascendant de l'orbite lunaire*. Ces longitudes sont données en degrés décimaux par :

$$L = 280.4665 + 36000.7698T + 0.000303T^2 \quad (3.23)$$

$$\Omega = 125.0443 - 1934.13626T + 0.002075T^2 \quad (3.24)$$

Ainsi, on voit qu'au grand cône de $23^\circ 27'$ parcouru en 26000 ans sur la sphère céleste par l'axe des pôles de la Terre (le mouvement de précession), on doit superposer :

- un mouvement elliptique de période égale à $360 \times 100 / 1934.136 = 18.613$ ans, de demi grand-axe de $17.2''$ et de demi petit axe de $9.2''$, qui correspond aux termes en $\Delta\psi$ et $\Delta\varepsilon$ proportionnels à $\sin \Omega$ et $\cos \Omega$,
- un mouvement elliptique de période égale à $1/2 \times 360 \times 100 / 36000.76 \simeq 0.5$ ans, de demi grand-axe de $1.3''$ et de demi petit axe de $0.6''$, qui correspond aux termes en $\Delta\psi$ et $\Delta\varepsilon$ proportionnels à $\sin 2L$ et $\cos 2L$,

qui constituent le mouvement dit de nutation.

3.5.1.2 Modèle précis

Un modèle très précis pour $\Delta\varepsilon$ et $\Delta\psi$ donné par [5] est de la forme:

$$\left. \begin{aligned} \Delta\psi &= \sum_{k=1}^K (a_k + b_k T) \cos \beta_k \\ \Delta\varepsilon &= \sum_{k=1}^K (c_k + d_k T) \sin \beta_k \end{aligned} \right\} \text{ avec } \beta_k = e_k E + m_k M + m'_k M' + f_k F + \omega_k \Omega$$

Les variables E , M , M' , F et Ω représentent respectivement :

- E : Élongation *moyenne*² de la Lune par rapport au Soleil :

$$E = 297.85036 + 445267.111480T - 0.0019142T^2 + T^3/189474$$

- M : Anomalie *moyenne* du Soleil (de la Terre) :

$$M = 357.52772 + 35999.050340T - 0.0001603T^2 - T^3/300000$$

- M' : Anomalie *moyenne* de la Lune :

$$M' = 134.96298 + 477198.867398T + 0.0086972T^2 + T^3/56250$$

- F : Argument de latitude de la Lune³ :

$$F = 93.27191 + 483202.017538T - 0.0036825T^2 + T^3/327270$$

- Ω : Longitude du nœud ascendant de l'orbite lunaire sur l'écliptique :

$$\Omega = 125.04452 - 1934.136261T + 0.0020708T^2 + T^3/450000$$

Dans ces expressions E , M , M' , F et Ω sont exprimés en degrés décimaux et T est le temps écoulé depuis J2000 compté en *siècles* juliens (échelle des temps des éphémérides).

Le tableau 3.1 fournit les $K = 14$ premières lignes des valeurs des coefficients a_i, \dots, d_i exprimés en 10^{-4} secondes d'arc et les valeurs des coefficients sans dimension e_i, \dots, ω_i . Les éléments absents sont nuls.

Lorsque F et Ω sont affectés du même coefficient, on peut factoriser $L' = F + \Omega$ qui correspond à la longitude moyenne (bâtarde) de la lune :

$$L' \simeq 218.3164 + 481267.8812T - 0.001599T^2$$

et $L = L' - E = F + \Omega - E$ qui correspond à la longitude moyenne du Soleil.

²différence de deux longitudes *moyennes* bâtarde.

³argument de la Lune à partir du nœud ascendant de son orbite

a_i	b_i	c_i	d_i	e_i	m_i	m'_i	f_i	ω_i
-171996	-174.2	92025	8.9					1
-13187	-1.6	5736	-3.1	-2			2	2
-2274	-0.2	977	-0.5				2	2
2062	0.2	-895	0.5					2
1426	-3.4	54	-0.1		1			
712	0.1	-7				1		
-517	1.2	224	-0.6	-2	1		2	2
-386	-0.4	200					2	1
-301		129	-0.1			1	2	2
217	-0.5	-95	0.3	-2	-1		2	2
-158				-2		1		
129	0.1	-70		-2			2	1
123		-53				-1	2	2
63				2				

Table 3.1: Coefficients de nutation

Les coordonnées des étoiles exprimées dans un repère de référence moyen (qui ne prend pas en compte la nutation) sont des coordonnées qualifiées de l'attribut moyennes. On appelle coordonnées *apparentes* d'une étoile, les coordonnées qui correspondent à celles d'une observation *réelle* depuis la Terre, c'est-à-dire prenant en compte la nutation (oscillation de Bradley), l'aberration annuelle (due à la vitesse de déplacement de la Terre), la parallaxe annuelle (due à l'éloignement Terre-Soleil) et la déviation gravitationnelle des rayons lumineux par le Soleil. Nous appellerons coordonnées *vraies* celles qui prennent en compte la précession et la nutation, sans prendre en compte les autres effets tels que l'aberration qui situent les étoiles non pas là où elles se trouvent, mais là où on les voit.

Dans la bibliothèque GNU Octave associée à ce document on trouvera la fonction `nutatationEcli_dg` qui permet de calculer ces variations.

3.5.2 Conversion des coordonnées écliptiques moyennes en vraies

Le basculement de l'axe des pôles céleste d'angle $-\Delta\varepsilon$ autour de l'axe des équinoxes est sans effet sur l'axe des équinoxes, ce qui laisse la base écliptique inchangée, par contre sa rotation d'angle $-\Delta\psi$ autour de l'axe des pôles écliptiques produit la même rotation de l'axe des équinoxes, et en conséquence la même rotation de la base écliptique. Les composantes dans la base transformée (qui est la base écliptique vraie) s'obtiennent en fonction des composantes dans la base écliptique moyenne (indiquée avec un 0) par la rotation inverse. Ainsi, on a :

$$(V)_{E_V} = R_Z(\Delta\psi)(V)_{E_0}$$

avec :

$$R_Z(\Delta\psi) = \begin{pmatrix} \cos \Delta\psi & -\sin \Delta\psi & 0 \\ \sin \Delta\psi & \cos \Delta\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

soit :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \cos \lambda_V \cos \beta_V \\ \sin \lambda_V \cos \beta_V \\ \sin \beta_V \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos \Delta\psi & -\sin \Delta\psi & 0 \\ \sin \Delta\psi & \cos \Delta\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \lambda_0 \cos \beta_0 \\ \sin \lambda_0 \cos \beta_0 \\ \sin \beta_0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (\cos \lambda_0 \cos \Delta\psi - \sin \lambda_0 \sin \Delta\psi) \cos \beta_0 \\ (\cos \lambda_0 \sin \Delta\psi + \sin \lambda_0 \cos \Delta\psi) \cos \beta_0 \\ \sin \beta_0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\lambda_0 + \Delta\psi) \cos \beta_0 \\ \sin(\lambda_0 + \Delta\psi) \cos \beta_0 \\ \sin \beta_0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

D'où tout simplement :

$$\begin{aligned} \lambda_V &= \lambda_0 + \Delta\psi \\ \beta_V &= \beta_0 \end{aligned} \tag{3.25}$$

qui est bien ce qui était attendu.

3.5.3 Conversion des coordonnées équatoriales moyennes en vraies

La transformation de la base équatoriale moyenne \mathcal{B}_M en base équatoriale vraie \mathcal{B}_V se fait au moyen des trois rotations successives suivantes : Une rotation d'angle $\bar{\varepsilon}$ autour de l'axe x (ligne des équinoxes) qui transforme \mathcal{B}_M en base écliptique moyenne \mathcal{B}_{E_O} , suivie d'une rotation d'angle $-\Delta\psi$ autour de Oz_{E_O} qui transforme \mathcal{B}_{E_O} en base écliptique vraie \mathcal{B}_{E_V} suivie d'une dernière rotation d'angle $-(\bar{\varepsilon} + \Delta\varepsilon)$ qui transforme \mathcal{B}_{E_V} en base équatoriale vraie \mathcal{B}_V , soit :

$$R_{MV} = R_X(\bar{\varepsilon}) R_Z(-\Delta\psi) R_X(-\bar{\varepsilon} - \Delta\varepsilon)$$

Les composantes dans \mathcal{B}_V s'obtiennent en fonction des composantes dans \mathcal{B}_M par le produit des rotations inverses, dans l'ordre d'écriture inverse :

$$R_{VM} = R_X(\bar{\varepsilon} + \Delta\varepsilon) R_Z(\Delta\psi) R_X(-\bar{\varepsilon})$$

telle que :

$$(V)_V = R_{VM}(V)_M$$

Dans le cas géocentrique, \mathcal{B}_M est en général la base du repère géocentrique équatorial moyen dit repère **MOD** (Mean of Date) et \mathcal{B}_V est la base du repère géocentrique équatorial vrai dit repère **TOD** (True of Date). La matrice R_{VM} est généralement notée **N** (comme nutation) :

$$N(t) = R_X(\bar{\varepsilon} + \Delta\varepsilon) R_Z(\Delta\psi) R_X(-\bar{\varepsilon})$$

Dans les changements de base géocentriques effectués pour ramener des coordonnées inertielles à des coordonnées liées à la Terre, après l'application de la matrice de précession $\mathbf{P}(t, t_0)$ qui a transformé les coordonnées dans le repère **GCRF** en coordonnées dans le repère **MOD**, l'application de la matrice $N(t)$ les transforme dans le repère géocentrique équatorial vrai **TOD**.

Développons ce dernier changement de coordonnées pour trouver les relations entre les coordonnées angulaires :

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha_V \cos \delta_V \\ \sin \alpha_V \cos \delta_V \\ \sin \delta_V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varepsilon & -\sin \varepsilon \\ 0 & \sin \varepsilon & \cos \varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \Delta\psi & -\sin \Delta\psi & 0 \\ \sin \Delta\psi & \cos \Delta\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \bar{\varepsilon} & \sin \bar{\varepsilon} \\ 0 & -\sin \bar{\varepsilon} & \cos \bar{\varepsilon} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha_0 \cos \delta_0 \\ \sin \alpha_0 \cos \delta_0 \\ \sin \delta_0 \end{pmatrix} \quad (3.26)$$

où on a posé $\varepsilon = \bar{\varepsilon} + \Delta\varepsilon$. En développant le second membre de cette expression on obtient 3 composantes :

$$\begin{aligned} A &= \cos \Delta\psi \cos \alpha_0 \cos \delta_0 - \sin \Delta\psi \cos \bar{\varepsilon} \sin \alpha_0 \cos \delta_0 - \sin \Delta\psi \sin \bar{\varepsilon} \sin \delta_0 \\ B &= \cos \varepsilon \sin \Delta\psi \cos \alpha_0 \cos \delta_0 + \sin \alpha_0 \cos \delta_0 \cos \varepsilon \cos \Delta\psi \cos \bar{\varepsilon} + \sin \alpha_0 \cos \delta_0 \sin \varepsilon \sin \bar{\varepsilon} \\ &\quad + \sin \delta_0 \cos \varepsilon \cos \Delta\psi \sin \bar{\varepsilon} - \sin \delta_0 \sin \varepsilon \cos \bar{\varepsilon} \\ C &= \sin \varepsilon \sin \Delta\psi \cos \alpha_0 \cos \delta_0 + \sin \alpha_0 \cos \delta_0 \sin \varepsilon \cos \Delta\psi \cos \bar{\varepsilon} - \sin \alpha_0 \cos \delta_0 \cos \varepsilon \sin \bar{\varepsilon} \\ &\quad + \sin \delta_0 \sin \varepsilon \cos \Delta\psi \sin \bar{\varepsilon} + \sin \delta_0 \cos \varepsilon \cos \bar{\varepsilon} \end{aligned}$$

dont les expressions sont relativement complexes. On en extrait :

$$\begin{aligned} \alpha_V &= \arctan 2(B, A) \\ \delta_V &= \arcsin C \end{aligned}$$

Si on fait un développement limité au premier ordre de l'expression de C en fonction de $\Delta\varepsilon$ et $\Delta\psi$, on obtient en posant $\delta_V = \delta_0 + \Delta\delta$:

$$\sin \delta_0 + \Delta\delta \cos \delta_0 \simeq \sin \delta_0 + (\Delta\psi \cos \alpha_0 \sin \bar{\varepsilon} + \Delta\varepsilon \sin \alpha_0) \cos \delta_0$$

d'où :

$$\Delta\delta \simeq \Delta\psi \cos \alpha_0 \sin \bar{\varepsilon} + \Delta\varepsilon \sin \alpha_0$$

Faisons maintenant un développement limité au premier ordre de B/A . Il vient :

$$\tan \alpha_0 + \frac{\Delta\alpha}{\cos^2 \alpha_0} \simeq \frac{B}{A} \simeq \tan \alpha_0 \frac{1 + \Delta\psi \frac{\cos \bar{\varepsilon} \cos \alpha_0 \cos \delta_0}{\sin \alpha_0 \cos \delta_0} - \Delta\varepsilon \frac{\sin \delta_0}{\sin \alpha_0 \cos \delta_0}}{1 - \Delta\psi \frac{\cos \bar{\varepsilon} \sin \alpha_0 \cos \delta_0 + \sin \bar{\varepsilon} \sin \delta_0}{\cos \alpha_0 \cos \delta_0}}$$

soit en divisant au premier ordre :

$$\tan \alpha_0 + \frac{\Delta\alpha}{\cos^2 \alpha_0} \simeq \tan \alpha_0 + \frac{1}{\cos^2 \alpha_0} (\Delta\psi \cos \bar{\varepsilon} + \Delta\psi \sin \bar{\varepsilon} \sin \alpha_0 \tan \delta_0 - \Delta\varepsilon \cos \alpha_0 \tan \delta_0)$$

d'où :

$$\Delta\alpha \simeq \Delta\psi \cos \bar{\varepsilon} + (\Delta\psi \sin \bar{\varepsilon} \sin \alpha_0 - \Delta\varepsilon \cos \alpha_0) \tan \delta_0$$

On a donc les formules approchées suivantes :

$$\begin{aligned}\alpha_V &= \alpha_0 + \Delta\psi (\cos \bar{\varepsilon} + \sin \bar{\varepsilon} \sin \alpha_0 \tan \delta_0) - \Delta\varepsilon \cos \alpha_0 \tan \delta_0 \\ \delta_V &= \delta_0 + \Delta\psi \sin \bar{\varepsilon} \cos \alpha_0 + \Delta\varepsilon \sin \alpha_0\end{aligned}\quad (3.27)$$

Remarque : Pour les astres réels ou fictifs *situés sur l'équateur* ($\delta_0 = 0$) le passage des coordonnées moyennes aux coordonnées vrais se fait simplement en ajoutant :

$$\Delta\alpha \simeq \Delta\psi \cos \bar{\varepsilon} \quad (3.28)$$

Dans la bibliothèque GNU Octave associée à ce document on trouvera la fonction `nutatationEqua` qui calcule les corrections à apporter aux coordonnées équatoriales.

L'alternative exacte à ces dernières formules, consiste à changer les coordonnées équatoriales moyennes en coordonnées écliptiques moyennes (en utilisant l'obliquité moyenne $\bar{\varepsilon}$), puis à ajouter $\Delta\psi$ à la longitude obtenue ce qui fournit les coordonnées écliptiques vraies et à faire le changement inverse vers les coordonnées équatoriales vraies (en utilisant l'obliquité vraie ε), ce qui revient à appliquer la formule 3.26.

Remarque : Au premier ordre les matrices rotation-passage s'écrivent :

$$\begin{aligned}R_{VM} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varepsilon & -\sin \varepsilon \\ 0 & \sin \varepsilon & \cos \varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \Delta\psi & -\sin \Delta\psi & 0 \\ \sin \Delta\psi & \cos \Delta\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \bar{\varepsilon} & \sin \bar{\varepsilon} \\ 0 & -\sin \bar{\varepsilon} & \cos \bar{\varepsilon} \end{pmatrix} \\ R_{VM} &\simeq \begin{pmatrix} 1 & -\Delta\psi \cos \varepsilon & -\Delta\psi \sin \varepsilon \\ \Delta\psi \cos \varepsilon & 1 & -\Delta\varepsilon \\ \Delta\psi \sin \varepsilon & \Delta\varepsilon & 1 \end{pmatrix}\end{aligned}\quad (3.29)$$

$$R_{MV} = R_{VM}^T \simeq \begin{pmatrix} 1 & \Delta\psi \cos \varepsilon & \Delta\psi \sin \varepsilon \\ -\Delta\psi \cos \varepsilon & 1 & \Delta\varepsilon \\ -\Delta\psi \sin \varepsilon & -\Delta\varepsilon & 1 \end{pmatrix}\quad (3.30)$$

Dans ces formules nous avons utilisé ε en argument des sinus et cosinus bien qu'on ne puisse faire la distinction entre $\Delta\psi \sin \varepsilon$ et $\Delta\psi \sin \bar{\varepsilon}$ qui est du deuxième ordre et de même entre $\Delta\psi \cos \varepsilon$ et $\Delta\psi \cos \bar{\varepsilon}$.

Chapitre 4

Localisation des étoiles

Plusieurs mouvements sont à prendre en compte pour situer précisément les étoiles dans un repère :

1. Leur mouvement propre des étoiles qui, par exemple dans le cas du catalogue d'étoile "*Bright Star Catalogue V50*", est donné sous forme des deux composantes de vitesses dans le repère équatorial moyen J2000.0. Ce mouvement est traité au paragraphe 4.1.
2. Le mouvement du repère moyen entre la date du catalogue et la date actuelle. C'est la correction de précession dont la composante principale atteint un tour complet du ciel en 26000 ans) qui est traitée au paragraphe 3.4.
3. Le mouvement du repère vrai par rapport au repère moyen à la date actuelle. C'est la correction de nutation qui atteint au maximum de 17" en longitude et 9" en latitude qui est traitée au paragraphe 3.5.
4. La correction d'aberration. Elle peut atteindre 20". nous la traitons ci-après au paragraphe 4.2.

4.1 Mouvement propre des étoiles

Dans le catalogue "*Bright Star Catalogue V50*" on trouve les coordonnées de 9110 objets stellaires sous la forme suivante :

- ascension droite et déclinaison dans le repère équatorial équinoxial moyen B1900 (époque 1900.0)
- ascension droite α et déclinaison δ dans le repère équatorial équinoxial moyen J2000 (époque 2000.0)
- longitude et latitude galactique
- composantes parallèle $v_p = \dot{\alpha} \cos \delta$ et méridienne $v_m = \dot{\delta}$ de la vitesse du mouvement propre dans le repère équatorial équinoxial moyen J2000 (époque 2000.0, telles que la vitesse totale est bien égale à $\|V\| = \sqrt{v_p^2 + v_m^2}$.

Dans le repère équatorial équinoxial moyen J2000 à l'époque $t_0 = J2000.0$ les composantes de la direction de l'objet sont :

$$U = \begin{pmatrix} \cos \alpha \cos \delta \\ \sin \alpha \cos \delta \\ \sin \delta \end{pmatrix}$$

et celles de sa vitesse V sont :

$$V = \begin{pmatrix} -\dot{\alpha} \sin \alpha \cos \delta - \dot{\delta} \cos \alpha \sin \delta \\ \dot{\alpha} \cos \alpha \cos \delta + \dot{\delta} \sin \alpha \sin \delta \\ \dot{\delta} \cos \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v_p \sin \alpha - v_m \cos \alpha \sin \delta \\ v_p \cos \alpha + v_m \sin \alpha \sin \delta \\ v_m \cos \delta \end{pmatrix}$$

Pour obtenir les composantes U' de l'objet à une époque t' , si t' est voisin de t_0 alors on a :

$$U' \simeq U + V$$

Si ce n'est pas le cas, en posant $\omega = \|V\| = \sqrt{v_p^2 + v_m^2}$, on a plus précisément :

$$U' = \cos \omega U + \frac{\sin \omega}{\omega} V$$

qui redonne l'expression précédente quand $\omega \rightarrow 0$.

Si δ n'est pas voisin de $\pm\pi/2$ il peut être plus simple de calculer :

$$\dot{\alpha} = \frac{v_p}{\cos \delta}$$

puis :

$$\alpha' = \alpha + \dot{\alpha} (t' - t_0)$$

$$\delta' = \delta + \dot{\delta} (t' - t_0)$$

et calculer ensuite :

$$U' = \begin{pmatrix} \cos \alpha' \cos \delta' \\ \sin \alpha' \cos \delta' \\ \sin \delta' \end{pmatrix}$$

A priori ce calcul peut être utilisé pour toutes les étoiles du *Bright Star Catalogue V50* car l'étoile polaire qui est la plus proche du pôle boréal en est quand même à 0.736 degré et celle qui est la plus proche du pôle austral en est quand même à 1.04 degré.

L'étoile la plus rapide du "*Bright Star Catalogue V50* est l'étoile numéro 4550. Elle se trouve dans la constellation de la grande Ourse et se déplace une vitesse d'environ 7".06 par an, soit d'un degré tous les 510 ans. Depuis les premières observations historiques, 3000 ans auparavant, elle s'est déplacée de 6 degrés.

4.2 L'aberration annuelle des étoiles

Il ne faut pas confondre l'aberration annuelle avec l'erreur de direction due à la parallaxe qui égale à l'écart angulaire du segment Terre-Soleil, vue de l'étoile. La parallaxe peut être négligée en astronomie populaire car elle vaut au maximum 0".8 (pour α du Centaure) et seulement 13 étoiles de magnitude supérieure à 9 (ce qui est assez faible) ont une parallaxe supérieure à 0".25.

L'aberration annuelle des étoiles a été découverte par James Bradley en 1729. Elle provient de la déviation des rayons lumineux en provenance de l'étoile due à la vitesse v de déplacement de la Terre par rapport au Soleil. Les coordonnées issus des catalogues ne prennent pas en compte la vitesse de révolution de la Terre. Il faut donc corriger ces coordonnées d'une valeur périodique dont l'amplitude atteint au maximum v/c , c'est-à-dire 20".5 (0.005 degrés). Cette correction suit le cycle annuel de la révolution de la Terre autour du Soleil.

Sur la figure 4.1, l'étoile E est supposée être très éloignée de telle manière que la parallaxe annuelle soit négligeable. Ainsi, en tout point de l'orbite de la Terre les rayons lumineux en provenance de l'étoile arrivent avec une direction parallèle à la direction Etoile - Soleil \overrightarrow{ES} , avec la vitesse de la lumière noté \vec{c} . Si \vec{v} est la vitesse de la Terre relative au Soleil, La vitesse du Soleil par rapport à la Terre est $-\vec{v}$. En faisant une composition de vitesse élémentaire (relativité négligée), composant la vitesse de la lumière issue de l'étoile relative au Soleil \vec{c} de direction \overrightarrow{ES} et la vitesse du Soleil relative à la Terre $-\vec{v}$, on obtient la direction \vec{w} pour les rayons lumineux, dans tout repère qui se translate avec la Terre. Ainsi vus de la Terre T les rayons issus de l'étoile E arrivent avec la direction \vec{w} . Les rayons lumineux semblent donc provenir d'une étoile perçue P qui se trouve à l'extrémité du vecteur vitesse \vec{v} issue d'une étoile E_0 positionnée dans sa direction nominale \overrightarrow{SE} à l'extrémité d'un vecteur de norme c issu de T .

4.2.1 Correction des coordonnées écliptiques

Quand la Terre fait une révolution autour du Soleil, le vecteur \vec{v} décrit un cercle parallèle à l'écliptique autour de E_0 . Il en résulte que P décrit en un an un cercle centré en E_0 . Si la latitude écliptique de l'étoile est faible, ce cercle est vu par la tranche en forme d'ellipse très aplatie et seule la longitude écliptique de l'étoile varie. La variation de la latitude écliptique apparaît dès que la latitude écliptique est notable et plus elle est élevée plus l'ellipse se rapproche d'un cercle.

Sur la figure 4.2, la Terre est représentée par la lettre T , dans le plan de l'écliptique et dans le plan normal à l'écliptique contenant la direction de l'étoile E . Dans le plan de l'écliptique la lumière provient de la projection P' de l'étoile dans ce plan. La direction $\overrightarrow{TE'}$ fait un angle polaire λ avec la direction du point vernal. C'est la longitude écliptique de l'étoile. Dans le plan orthogonal, le vecteur \overrightarrow{ET} représente la vitesse de la lumière de module c . Ce vecteur fait un angle β avec le plan de l'écliptique, latitude écliptique de l'étoile.

Dans le plan de l'écliptique nous avons représenté, issue de E et dirigée vers P' , la composante de la vitesse de la Terre \vec{v} qui fait un angle $l + \frac{\pi}{2}$ avec la direction du point vernal (orbite terrestre supposée circulaire, vitesse orthogonale au rayon ST). La projection algébrique de \vec{v} sur $\overrightarrow{TE'}$ vaut $v \sin(l - \lambda)$ et elle vaut $v \cos(l - \lambda)$ sur la

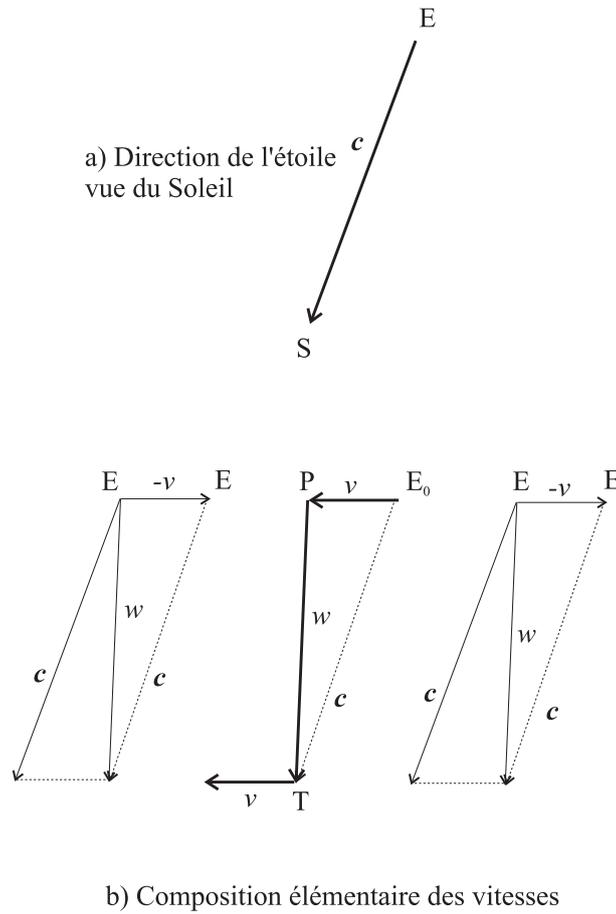


Figure 4.1: Aberration annuelle 1

direction orthogonale ($\hat{a} + \pi/2$). La longitude de l'étoile est donc augmentée, au premier ordre en radians d'une quantité :

$$\Delta\lambda = v \cos(l - \lambda) / c \cos \beta$$

Dans le plan orthogonal à l'écliptique, la lumière semble provenir d'un point P'' derrière P, mais à la même latitude que P car la composante $v \cos(l - \lambda)$ ne produit pas de variation en latitude. La composante $v \sin(l - \lambda)$ se projette sur la perpendiculaire ($\hat{a} + \pi/2$) au vecteur \overrightarrow{TE} selon la valeur algébrique $v \sin(l - \lambda) \sin \beta$. Vue de la Terre la latitude de l'étoile semble donc augmentée de la quantité :

$$\Delta\beta = v \sin(l - \lambda) \sin \beta / c$$

Prenons en compte la forme elliptique de l'orbite terrestre pour évaluer de manière plus précise ces deux corrections.

Nous verrons au paragraphe 6.3 avec la relation 6.8 que la vitesse d'une planète sur son orbite est la somme de deux termes, le principal de module V_0 qui est dirigé à $+\pi/2$ du rayon vecteur Soleil-Terre, qui dans le cas de la Terre a pour longitude $\lambda_T = \lambda_\odot \pm \pi$ et le terme secondaire de module eV_0 qui est dirigé à $+\pi/2$ de la direction du périhélie de l'orbite Terrestre dont la longitude est notée ϖ .

Relativement à l'équinoxe moyen de la date, l'excentricité e et la longitude du périhélie ϖ sont donnés par :

$$e = 0.016708634 - 0.000042037T - 0.0000001267T^2$$

$$\varpi = 102^\circ.93735 + 1^\circ.71946T + 0^\circ.00046T^2$$

où T est exprimé en siècles juliens écoulés depuis J2000 (échelle des temps des éphémérides, mais l'influence du ΔT est négligeable).

La vitesse V_0 donnée par la relation 6.7 peut être considérée comme la vitesse moyenne de la Terre relativement au Soleil. Notons :

$$\kappa = \frac{V_0}{c}$$

de l'ordre de 10^{-4} radians, il est généralement exprimé en secondes d'arc :

$$\kappa = 20''.49552$$

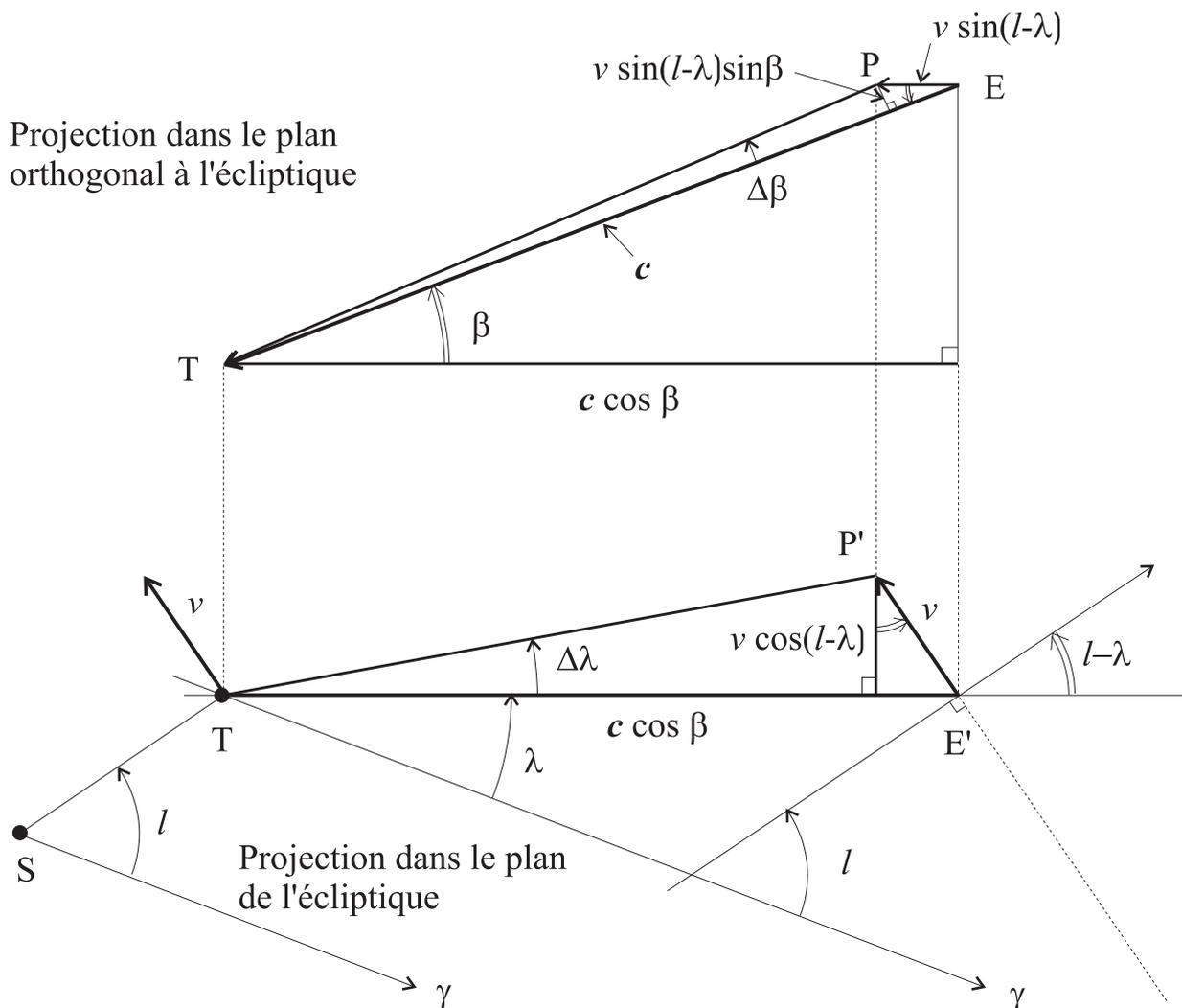


Figure 4.2: Aberration annuelle 2

En combinant les effets de la composante principale V_0 associée à $l - \lambda = \lambda_{\odot} \pm \pi$ et de la composante secondaire eV_0 associée à $l - \lambda = \varpi - \lambda$, on obtient :

$$\Delta\lambda \simeq \kappa \frac{-\cos(\lambda_{\odot} - \lambda) + e \cos(\varpi - \lambda)}{\cos\beta}$$

$$\Delta\beta = \kappa \sin\beta (-\sin(\lambda_{\odot} - \lambda) + e \sin(\varpi - \lambda))$$

Dans la bibliothèque GNU Octave associée à ce document on trouvera la fonction `aberrEcli` qui calcule ces deux corrections.

Remarques :

- Pour $\beta = 0$ ou π (étoile au voisinage du plan de l'écliptique), on a $\Delta\beta = 0$ et $\Delta\lambda \simeq \mp\kappa \cos(\lambda_{\odot} - \lambda)$ qui atteint son maximum κ lorsque l'étoile est alignée avec le Soleil.
- Pour $\beta \sim \pm\frac{\pi}{2}$, λ n'est pas défini, les formules ne sont pas applicables. Si on fait la construction spécifique à ce cas, on voit que $\Delta\beta \simeq \pm\kappa$ et que la lumière semble venir de la direction $\lambda' \simeq \lambda_{\odot} - \frac{\pi}{2}$. Ainsi une étoile qui serait située au pôle nord de l'écliptique semblerait effectuer autour de celui-ci un cercle de rayon κ en quadrature avec la longitude du Soleil.

L'ellipticité fait que la vitesse de la Terre est plus élevée au voisinage du périhélie et plus faible à son opposé. Cette variation de vitesse dans le plan de l'écliptique produit son effet maximal sur $\Delta\lambda$ lorsque l'étoile est dans le plan orthogonal à l'écliptique qui contient son grand axe ($\cos(\varpi - \lambda) = \pm 1$), par contre elle ne produit là aucune effet sur $\Delta\beta$ ($\sin(\varpi - \lambda) = 0$).

Remarque : Au premier ordre les composantes de la direction corrigée s'obtiennent à partir des composantes de la direction non corrigée à l'aide de la matrice de micro-rotation suivante :

$$(V_{cor})_E = R_Z(\lambda) R_Y(-\Delta\beta) R_Z(-\lambda) R_Z(\Delta\lambda) (V)_E$$

$$(V_{cor})_E \simeq \begin{pmatrix} 1 & -\Delta\lambda & -\Delta\beta \cos \lambda \\ \Delta\lambda & 1 & -\Delta\beta \sin \lambda \\ \Delta\beta \cos \lambda & \Delta\beta \sin \lambda & 1 \end{pmatrix} (V)_E$$

A titre de vérification, en utilisant la dernière ligne, on retrouve bien l'approximation :

$$\begin{aligned} \sin(\beta + \Delta\beta) &\simeq \Delta\beta \cos^2 \lambda \cos \beta + \Delta\beta \sin^2 \lambda \cos \beta + \sin \beta \\ &\simeq \sin \beta + \Delta\beta \cos \beta \end{aligned}$$

4.2.2 Correction des coordonnées équatoriales

La correction des coordonnées équatoriales est plus complexe. Au premier ordre les composantes de la direction corrigée s'obtiennent à partir des composantes de la direction non corrigée à l'aide de la matrice de micro-rotation suivante :

$$(V_{cor})_C \simeq R_X(\varepsilon) \begin{pmatrix} 1 & -\Delta\lambda & -\Delta\beta \cos \lambda \\ \Delta\lambda & 1 & -\Delta\beta \sin \lambda \\ \Delta\beta \cos \lambda & \Delta\beta \sin \lambda & 1 \end{pmatrix} R_X(-\varepsilon) (V)_C$$

soit :

$$(V_{cor})_C = \begin{pmatrix} 1 & -(\Delta\lambda \cos \varepsilon - \Delta\beta \sin \varepsilon \cos \lambda) & -(\Delta\lambda \sin \varepsilon + \Delta\beta \cos \varepsilon \cos \lambda) \\ (\Delta\lambda \cos \varepsilon - \Delta\beta \sin \varepsilon \cos \lambda) & 1 & -\Delta\beta \sin \lambda \\ (\Delta\lambda \sin \varepsilon + \Delta\beta \cos \varepsilon \cos \lambda) & \Delta\beta \sin \lambda & 1 \end{pmatrix} (V)_C$$

En posant :

$$\begin{aligned} S &= \Delta\lambda \sin \varepsilon + \Delta\beta \cos \varepsilon \cos \lambda \\ D &= \Delta\lambda \cos \varepsilon - \Delta\beta \sin \varepsilon \cos \lambda \end{aligned} \quad (4.1)$$

Il vient :

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha + \Delta\alpha) \cos(\delta + \Delta\delta) \\ \sin(\alpha + \Delta\alpha) \cos(\delta + \Delta\delta) \\ \sin(\delta + \Delta\delta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -D & -S \\ D & 1 & -\Delta\beta \sin \lambda \\ S & \Delta\beta \sin \lambda & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha \cos \delta \\ \sin \alpha \cos \delta \\ \sin \delta \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

En considérant les approximations suivantes :

$$\begin{aligned} \sin(\delta + \Delta\delta) &\simeq \sin \delta + \Delta\delta \cos \delta \\ \tan(\alpha + \Delta\alpha) &\simeq \tan \alpha + \frac{\Delta\alpha}{\cos^2 \alpha} \end{aligned}$$

on tire de la troisième ligne de 4.2 :

$$\sin \delta + \Delta\delta \cos \delta \simeq S \cos \alpha \cos \delta + \Delta\beta \sin \lambda \sin \alpha \cos \delta + \sin \delta$$

d'où :

$$\Delta\delta \simeq S \cos \alpha + \Delta\beta \sin \lambda \sin \alpha$$

et des deux premières :

$$\begin{aligned} \tan \alpha + \frac{\Delta\alpha}{\cos^2 \alpha} &\simeq \frac{D \cos \alpha \cos \delta + \sin \alpha \cos \delta - \Delta\beta \sin \lambda \sin \delta}{\cos \alpha \cos \delta - D \sin \alpha \cos \delta - S \sin \delta} \\ &\simeq \frac{\tan \alpha + D - \Delta\beta \frac{\sin \lambda}{\cos \alpha} \tan \delta}{1 - D \tan \alpha - S \frac{\tan \delta}{\cos \alpha}} \\ &\simeq \left(\tan \alpha + D - \Delta\beta \frac{\sin \lambda}{\cos \alpha} \tan \delta \right) \left(1 + D \tan \alpha + S \frac{\tan \delta}{\cos \alpha} \right) \\ &\simeq \tan \alpha + D + D \tan^2 \alpha - \Delta\beta \frac{\sin \lambda}{\cos \alpha} \tan \delta + S \frac{\tan \delta}{\cos \alpha} \tan \alpha \\ &\simeq \tan \alpha + \frac{D}{\cos^2 \alpha} - \Delta\beta \frac{\sin \lambda \cos \alpha}{\cos^2 \alpha} \tan \delta + \frac{S \tan \delta \sin \alpha}{\cos^2 \alpha} \end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned}\Delta\alpha &\simeq D + (S \sin \alpha - \Delta\beta \sin \lambda \cos \alpha) \tan \delta \\ \Delta\delta &\simeq S \cos \alpha + \Delta\beta \sin \lambda \sin \alpha\end{aligned}$$

avec S et D donnés par 4.1.

Ces deux expressions nécessitent le calcul au préalable dépendent des coordonnées écliptiques (λ, β) qui y apparaissent explicitement, mais qui apparaissent également dans les expressions de $\Delta\lambda$, $\Delta\beta$, S et D .

Jean Meeus fournit dans ses ouvrages [5, 4] les expressions de $\Delta\alpha$ et $\Delta\delta$ ou les coordonnées (λ, β) ont été éliminées en fonctions de (α, δ) , ce qui les rend beaucoup plus pratiques :

$$\begin{aligned}\Delta\alpha &\simeq \kappa \frac{eF(\varpi) - F(\lambda_{\odot})}{\cos \delta} \\ \Delta\delta &\simeq \kappa (eG(\varpi) - G(\lambda_{\odot}))\end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned}F(X) &= \cos \varepsilon \cos \alpha \cos X + \sin \alpha \sin X \\ G(X) &= (\sin \varepsilon \cos \delta - \cos \varepsilon \sin \alpha \sin \delta) \cos X + \cos \alpha \sin \delta \sin X\end{aligned}$$

Dans la bibliothèque GNU Octave associée à ce document on trouvera la fonction `aberrEqua` qui calcule ces deux corrections.

Une approche alternative à ces formules peut consister à calculer (λ, β) à partir de (α, δ) par les formules 3.11, puis corriger directement (λ, β) , pour finalement calculer les coordonnées corrigées (α, δ) par les formules 3.9.

Chapitre 5

Repères terrestres, Temps sidéral et Temps solaire

Aux chapitres précédents nous avons considéré des repères quasi fixes. Dans ce chapitre nous allons considérer les repères liés à la Terre animée de sa rotation journalière. Comme pour les repères quasi fixes, on considère un globe terrestre *moyen* qui tourne autour de son *axe moyen* d'environ un tour par jour, cet axe étant par ailleurs animé du mouvement de *précession*, et un globe terrestre *vrai*, pour lequel on prend en compte le mouvement de *nutations* de son axe de rotation.

5.1 Sphéroïde et latitudes terrestres

La Terre est modélisée par un volume nommé *géoïde* qui est l'équipotentielle d'altitude 0 mètre relative au potentiel de gravité. Par définition, en tout lieu sa surface est orthogonale à la direction du fil à plomb. Au niveau des mers et océans, la surface par temps calme est celle du géoïde, à quelques singularités près. Sur terre, la forme est plus perturbée car la masse des montagnes et des mascons a un effet sur la direction du fil à plomb. Pour la localisation, on utilise de préférence un *ellipsoïde de révolution (sphéroïde)* très proche de ce géoïde.

On distingue trois différentes latitudes :

- la *latitude astronomique*, notée φ , est l'angle que fait la direction de la verticale du lieu (donnée par le fil à plomb) avec le plan équatorial.
- la *latitude géocentrique*, notée φ' , est l'angle que fait le rayon vecteur issu du centre de la Terre passant par le point M avec le plan équatorial.
- la *latitude géodésique* (ou *géographique*), sans symbole, est l'angle que fait la normale locale au sphéroïde avec le plan équatorial. C'est également l'angle que fait l'axe de rotation de la Terre avec le plan tangent local au sphéroïde. La différence entre cette latitude et la latitude astronomique est généralement inférieure à 3'' sauf en certains points anormaux. C'est pour cela que nous négligerons cet écart utiliserons le symbole φ de la latitude astronomique en utilisant les caractéristiques géométriques de la latitude géodésique.

La différence entre les latitudes astronomique et géocentrique est toujours inférieure ou égale à 12', et elle est nulle aux pôles et à l'équateur.

5.1.1 Passage des coordonnées géodésiques aux coordonnées cartésiennes

Pour localiser un point M dans le plan de son méridien, on considère l'ellipse de la figure 5.1.1. Les coordonnées de M s'écrivent :

$$\begin{cases} X = d + r \cos \varphi = \rho \cos \varphi' \\ Z = r \sin \varphi = \rho \sin \varphi' \end{cases}$$

Attention : Le point I n'est pas un foyer de l'ellipse. C'est un point d'abscisse variable avec φ qui est confondu avec O lorsque $\varphi = \pi/2$.

Rappelons l'équation cartésienne de l'ellipse :

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Z^2}{b^2} = 1 \quad (5.1)$$

où dans le cas de la Terre a est le demi grand axe ou *rayon équatorial* et b le demi petit axe ou *rayon polaire*.

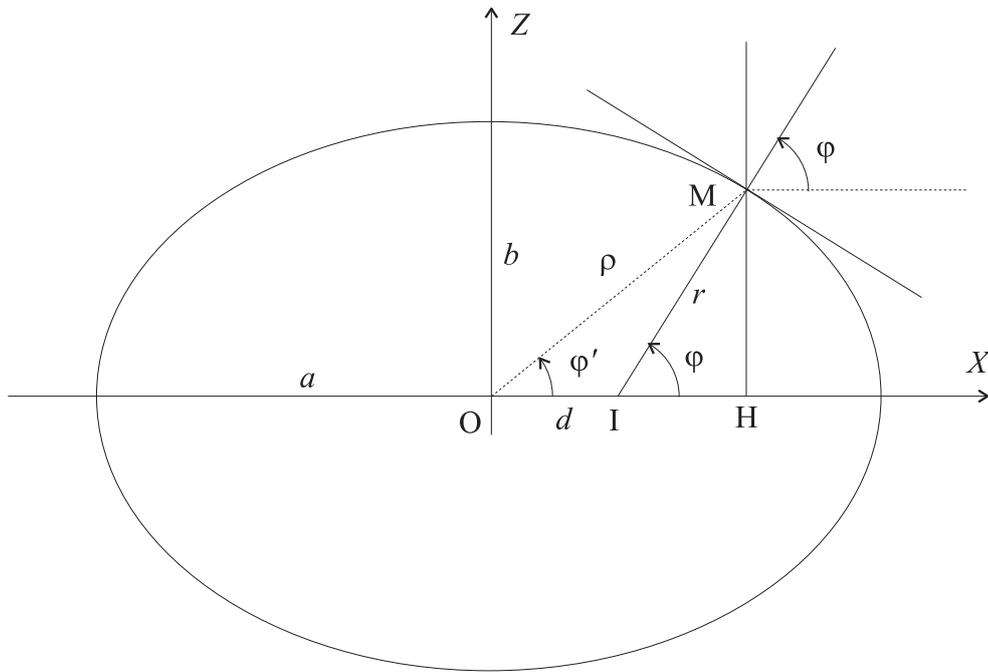


Figure 5.1: Ellipse, latitudes géodésique et géocentrique

On définit le troisième paramètre c par :

$$a^2 = b^2 + c^2 \Leftrightarrow c = \|OF\| = \sqrt{a^2 - b^2}$$

où F est un foyer de l'ellipse.

On définit l'excentricité e par :

$$e = \frac{c}{a} \rightarrow \begin{cases} c = ae \\ b = a\sqrt{1 - e^2} \end{cases}$$

On introduit par ailleurs le paramètre p défini par :

$$p = \frac{b^2}{a} \rightarrow p = a(1 - e^2)$$

Écrivons une équation qui spécifie la tangente à l'ellipse. Différencions son équation cartésienne. Il vient :

$$\frac{1}{a^2}XdX + \frac{1}{b^2}ZdZ = 0$$

soit en remplaçant Z par sa valeur :

$$\frac{b^2}{ra^2}XdX + dZ \sin \varphi = 0$$

Écrivons que le vecteur $\begin{pmatrix} dX \\ dZ \end{pmatrix}$ est orthogonal à IM de cosinus directeurs $\begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}$, soit :

$$dX \cos \varphi + dZ \sin \varphi = 0$$

En comparant avec la relation précédente, on en déduit que :

$$X = r \frac{a^2}{b^2} \cos \varphi = \frac{r}{1 - e^2} \cos \varphi$$

Reportons X et Z dans (5.1) pour calculer r . Il vient :

$$r = \frac{b^2}{\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}} = \frac{b^2}{a\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}} = \frac{p}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}}$$

D'où les coordonnées de M :

$$\begin{cases} X = \frac{r}{1 - e^2} \cos \varphi \\ Z = r \sin \varphi \end{cases} \quad \text{avec } r = \frac{a(1 - e^2)}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}}$$

Posons :

$$\Delta = \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi} \quad (5.2)$$

Si le point M est à l'altitude h , ses coordonnées deviennent :

$$\begin{cases} X = \left(\frac{a}{\Delta} + h \right) \cos \varphi \\ Z = \left(\frac{a(1 - e^2)}{\Delta} + h \right) \sin \varphi \end{cases} \quad (5.3)$$

Il n'y a pas d'expression simple des coordonnées polaires (ρ, φ') en fonction de φ et h . Le plus rapide est de les calculer à partir des coordonnées cartésiennes :

$$\begin{aligned} \rho &= \sqrt{X^2 + Z^2} \\ \varphi' &= \arctan 2(Z, X) \end{aligned}$$

On a par ailleurs l'expression remarquable suivante :

$$X \cos \varphi + Z \sin \varphi = h + a\Delta$$

Ces expressions s'expriment également en fonction de l'aplatissement f (pour flattening factor) qui est relié à e par :

$$f = 1 - \frac{b}{a} = 1 - \sqrt{1 - e^2} \rightarrow \begin{cases} e^2 = f(2 - f) \\ 1 - e^2 = (1 - f)^2 \end{cases}$$

d'où :

$$\Delta = \sqrt{1 - f(2 - f) \sin^2 \varphi}$$

Avec f les coordonnées de M s'écrivent :

$$\begin{cases} X = \left(\frac{r}{(1 - f)^2} + h \right) \cos \varphi \\ Z = (r + h) \sin \varphi \end{cases} \quad \text{avec } r = \frac{a(1 - f)^2}{\sqrt{1 - f(2 - f) \sin^2 \varphi}} \quad (5.4)$$

Le sphéroïde de référence terrestre IAG - GRS80 est associé aux référentiels géodésiques WGS84 et RGF93. Il est défini par son demi-grand axe :

$$a = 6378137 \text{ m}$$

et par son aplatissement :

$$f = 1/298.257222101$$

On en déduit $e = 0.081819191$.

5.1.2 Passage des coordonnées cartésiennes aux coordonnées géodésiques

Il n'y a pas de formules analytiques permettant de calculer le couple (φ, h) à partir du couple (X, Z) . Le calcul peut se faire par itérations :

1. Initialiser $h = 0$, $\varphi = 0$, $\Delta = 1$.
2. $\varphi_{old} = \varphi$ et $h_{old} = h$
3. $r_1 = \frac{a}{\Delta}$, $r = r_1(1 - e^2)$, $\varphi = \text{atan2}\left(\frac{Z}{r + h}, \frac{X}{r_1 + h}\right)$
4. $\Delta = \sqrt{1 - \sin^2 \varphi}$, $h = X \cos \varphi + Z \sin \varphi - a\Delta$
5. Si $|\varphi - \varphi_{old}| > \varepsilon_\varphi$ ou $|h - h_{old}| > \varepsilon_h$ recommencer en 2.
6. Fin.

Même en demandant une très grande précision (10^{-12} en relatif) la convergence est extrêmement rapide et ne demande pas plus de 2 itérations.

5.2 Repère de Greenwich

Considérons le repère $\mathcal{R}_G = (T, \vec{x}_G, \vec{y}_G, \vec{z}_C)$ de centre T le barycentre de la Terre, avec \vec{z}_C orthogonal à l'équateur vrai de la date et avec \vec{x}_G dans le méridien passant par Greenwich. Ce repère est appelé repère **PEF** en langue anglaise (Pseudo Earth Fixed), mais aussi EFG (Earth Fixed Greenwich) ou ECEF (Earth Centered Earth Fixed).

La prise en compte des écarts entre ce repère et le repère **TEF** (True Earth fixed) lié à la croute terrestre (également appelé ECR pour Earth Centered Rotating) se fait en utilisant les coordonnées (x_p, y_p) du point d'intersection de l'axe \vec{z}_C avec la croute terrestre au pôle Nord qui sont publiées par l'IERS (International Earth Rotating Service). Les mésalignement résultants depuis J2000 sont inférieurs à la seconde d'arc.

La base $\mathcal{B}_G (\vec{x}, \vec{y}_G, \vec{z}_C)$ s'obtient à partir d'une base équatoriale \mathcal{B}_C par une rotation $R_Z (\alpha_G)$ d'angle $\alpha_G = T_{SG}$ autour de l'axe des pôles. Il en résulte la matrice de passage $R_{CG} = R_Z (\alpha_G)$ de \mathcal{B}_C à \mathcal{B}_G :

$$R_{CG} = \begin{pmatrix} \cos \alpha_G & -\sin \alpha_G & 0 \\ \sin \alpha_G & \cos \alpha_G & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R_{GC} = \begin{pmatrix} \cos \alpha_G & \sin \alpha_G & 0 \\ -\sin \alpha_G & \cos \alpha_G & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dans les changements de base géocentriques effectués pour ramener des coordonnées inertielles à des coordonnées liées à la Terre, après l'application de la matrice de précession $\mathbf{P}(t, t_0)$ qui a transformé les coordonnées dans le repère **GCRF** en coordonnées dans le repère **MOD**, et l'application de la matrice $\mathbf{N}(t)$ qui les a transformées dans le repère repère géocentrique équatorial vrai **TOD**, l'application de la matrice R_{GC} (avec α_G donné par la relation 5.18) les transforme dans le repère **PEF**, ce qui achève la transformation si on néglige le mouvement du pôle (x_p, y_p) .

Des tables des valeurs de x_p et y_p publiées par l'IERS permettent de calculer une matrice de correction **W** :

$$\mathbf{W} = R_Y(x_p)R_X(y_p) \quad (5.5)$$

qui appliquée aux coordonnées dans le repère **PEF** fournissent les coordonnées terminales dans le repère **TEF**.

5.3 Coordonnées géographiques

La position d'un point A à la surface de la Terre y est repérée dans le repère vraiment liée à la Terre (repère TEF) par sa *longitude* L et par une de ses 3 *latitudes* présentées en section 5.1 que nous noterons φ . Pour simplifier nous considérons que ce repère est identique au repère PEF \mathcal{R}_G . Si une très grande précision est nécessaire, il faudra prendre en compte la transformation **W** citée en 5.5.

Le couple (L, φ) constitue les *coordonnées géographiques* du lieu A. Nous ne faisons pas de distinction entre la latitude géodésique (normale au sphéroïde) et la latitude astronomique (verticale donnée par le fil à plomb).

Remarque : Attention, certains auteurs prennent le sens rétrograde comme sens positif pour L .

Pour obtenir les coordonnées cartésiennes du lieu A, il faut préciser son altitude h au dessus du sphéroïde. On a alors :

$$(\text{TA})_G = \begin{pmatrix} x = X \cos L \\ y = X \sin L \\ z = Z \end{pmatrix}$$

où X et Z sont donnés par les relations 5.3 ou 5.4, à savoir :

$$\left. \begin{array}{l} X = \left(\frac{r}{1 - e^2} + h \right) \cos \varphi \\ Z = (r + h) \sin \varphi \end{array} \right\} \text{ avec } \begin{cases} r = \frac{a(1 - e^2)}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}} = \frac{a(1 - f)^2}{\sqrt{1 - f(2 - f) \sin^2 \varphi}} \\ a = 6378137 \text{ m} \\ e = 0.0818191910428 \\ f = 1/298.257222101 \end{cases} \quad (5.6)$$

5.4 Repère local - Coordonnées horizontales d'un astre

Notons \mathcal{R}_A le repère local $(A, \vec{x}_A, \vec{y}_A, \vec{z}_A)$ avec A un point de coordonnées géographiques (L_A, φ_A) où φ_A est la latitude astronomique ou géodésique du lieu. L'axe \vec{z}_A est dirigé selon la verticale locale, l'axe \vec{x}_A est dirigé vers le sud et l'axe \vec{y}_A vers l'est. On passe de la base \mathcal{B}_G à la base \mathcal{B}_A par la matrice de passage :

$$R_{GA} = R_Z(L_A)R_Y\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_A\right)$$

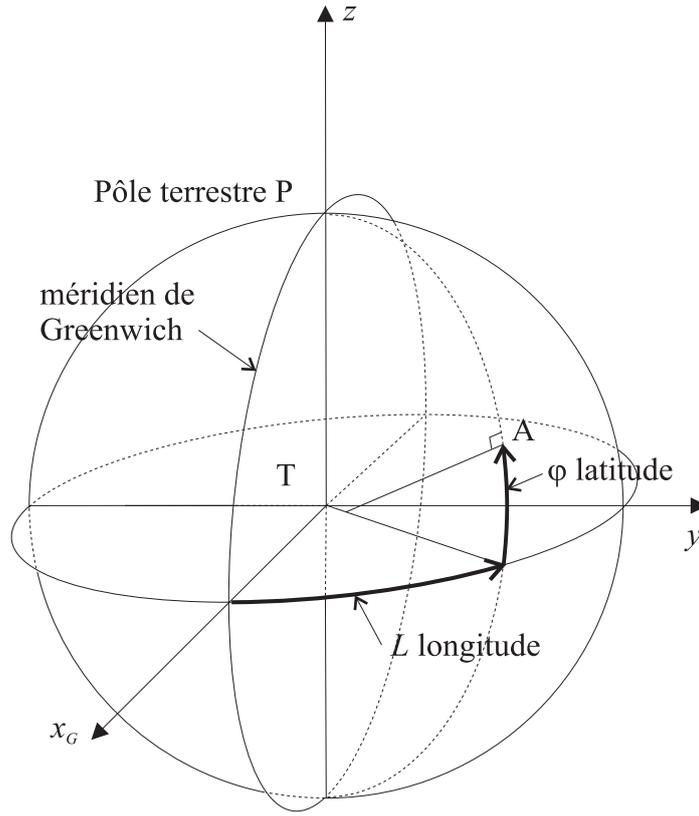


Figure 5.2: Repère géographique

soit :

$$\begin{aligned}
 R_{GA} &= \begin{pmatrix} \cos L_A & -\sin L_A & 0 \\ \sin L_A & \cos L_A & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin \varphi_A & 0 & \cos \varphi_A \\ 0 & 1 & 0 \\ -\cos \varphi_A & 0 & \sin \varphi_A \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \cos L_A \sin \varphi_A & -\sin L_A & \cos L_A \cos \varphi_A \\ \sin L_A \sin \varphi_A & \cos L_A & \sin L_A \cos \varphi_A \\ -\cos \varphi_A & 0 & \sin \varphi_A \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

On passe de la base \mathcal{B}_C à la base \mathcal{B}_A par la matrice de passage :

$$\begin{aligned}
 R_{CA} &= R_{CG} R_{GA} = R_Z(\alpha_G) R_Z(L_A) R_Y\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_A\right) \\
 &= R_Z(\alpha_G + L_A) R_Y\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_A\right) \\
 &= R_Z(\alpha_A) R_Y\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_A\right)
 \end{aligned} \tag{5.7}$$

qui fait apparaître l'ascension droite du lieu :

$$\alpha_A = \alpha_G + L_A$$

Nous verrons au paragraphe 5.8.1 que l'angle α_A est égal temps sidéral local noté T_{SA} :

$$\alpha_A = T_{SA} = T_{SG} + L_A \tag{5.8}$$

d'où :

$$R_{CA} = \begin{pmatrix} \cos \alpha_A \sin \varphi_A & -\sin \alpha_A & \cos \alpha_A \cos \varphi_A \\ \sin \alpha_A \sin \varphi_A & \cos \alpha_A & \sin \alpha_A \cos \varphi_A \\ -\cos \varphi_A & 0 & \sin \varphi_A \end{pmatrix}$$

Notons \vec{v} la projection dans le plan horizontal local de la direction \vec{u} de l'astre. On note :

- $a = \angle(\vec{x}_A, \vec{v})$ l'azimut de la direction \vec{u} , compté positif dans le sens rétrograde,
- $z = \angle(\vec{z}_A, \vec{u})$ la distance azimutale de la direction \vec{u} ,

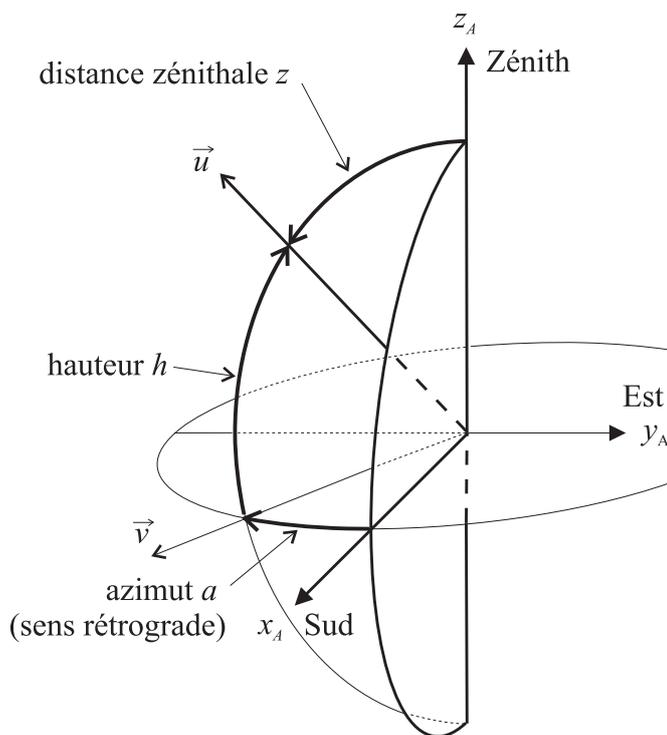


Figure 5.3: Coordonnées horizontales

- $h = \angle(\vec{v}, \vec{u})$ la hauteur de la direction \vec{u} , avec :

$$z + h = \frac{\pi}{2}$$

Le couple (a, h) constitue les *coordonnées horizontales* de la direction.

Remarque : Les coordonnées horizontales se mesuraient avec un théodolite qui est une lunette pivotant autour d'un axe horizontal, pivotant lui-même autour d'un axe vertical. *Traditionnellement l'azimut est compté positif dans le sens rétrograde*, à partir d'un plan vertical origine qui est à préciser. *Dans une précédente édition nous ne suivions pas cette convention que nous avons adopté dans celle-ci pour nous conformer à l'usage.* Il en résulte que les formules qui donnent les 3 cosinus directeurs de la direction \vec{u} à partir du couple (a, h) dans la base \mathcal{B}_A ne sont par les mêmes formules que celles utilisées avec le couple (λ, β) pour la base \mathcal{B}_E , ou avec le couple (α, δ) pour la base \mathcal{B}_C ou encore avec le couple (L, φ) pour la base \mathcal{B}_G . Il y a un changement de signe pour la composante sur l'axe des y :

$$(u)_A = \begin{pmatrix} \cos a \cos h \\ -\sin a \cos h \\ \sin h \end{pmatrix}$$

Attention : Sur les compas et boussoles, dans les logiciels de Marine et de plus en plus dans les logiciels d'astronomie pour amateurs (Stellarium par exemple) l'azimut est compté à partir de Nord et dans le sens des aiguilles d'une montre. Cela revient à changer a en $\pi - a$, ce qui revient à changer les signes de $\sin a$ et $\cos a$. Dans ce cas les formules deviennent :

$$(u)_A = \begin{pmatrix} -\cos a \cos h \\ \sin a \cos h \\ \sin h \end{pmatrix}$$

5.5 Réfraction atmosphérique

L'atmosphère terrestre provoque une déviation des rayons lumineux qui augmente la hauteur h' apparente lors de l'observation des astres. L'azimut a n'est pas affecté. La hauteur vraie h est augmentée d'une quantité h_{refrac} qui est nulle au zénith et augmente avec la distance zénithale :

$$h' = h + h_{refrac}$$

La valeur de h_{refrac} peut atteindre $0^{\circ}34' = 0^{\circ}5667$ au voisinage de l'horizon, mais comme à cause de la pollution lumineuse on observe rarement en dessous de 15° , h_{refrac} est en pratique toujours inférieur à $34'$.

La formule de Th. Saemundsson (c.f. [4]) donne fournit h_{refrac} en minutes d'arc, en fonction de h exprimé en degrés :

$$h_{refrac}(h) = 1.02K / \tan\left(h + \frac{10.3}{h + 5.11}\right)$$

et celle de G.G. Bennett (c.f. [4]) fournit h_{refrac} , toujours en minutes d'arc, en fonction de h' exprimé en degrés :

$$h_{refrac}(h') = K / \tan\left(h' + \frac{7.31}{h' + 4.4}\right)$$

Attention : $h_{refrac}(h)$ est ajouté à h pour calculer h' , alors que $h_{refrac}(h')$ est retranché à h' pour calculer h .

Le paramètre K peut être pris égal à 1, ou calculé (c.f. [1, 5]) en fonction de la température et de la pression par :

$$K = \frac{P}{1010} \times \frac{283}{T + 273}$$

où P est la pression en millibars et T la température en degrés Celsius.

Ces formules approchées ne donnant pas une valeur nulle pour $h_{refrac}(90^{\circ})$. On les corrige en donnant h_{refrac} une valeur nulle si l'argument de la fonction tangente est supérieur ou égal à 90° (cf. la fonction `refraction_dg` qui se trouve dans la bibliothèque GNU Octave associée à ce document).

5.6 Angle horaire - Cordonnées horaires équatoriales d'un astre

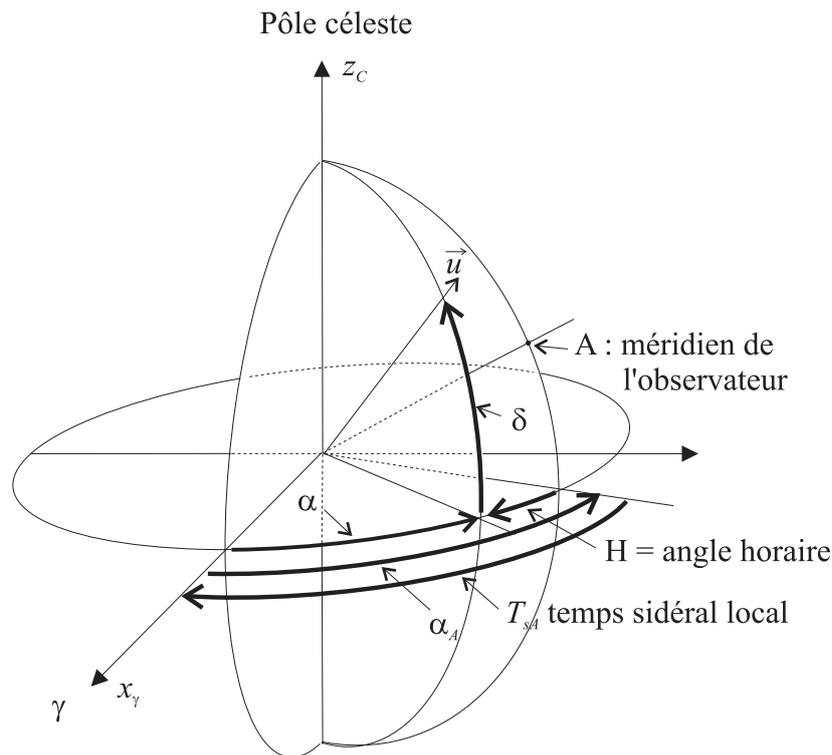


Figure 5.4: Coordonnées horaires et temps sidéral local

Les astronomes utilisent un autre système de coordonnées, mi-local, mi-équatorial pour repérer la direction \vec{u} d'un astre. Ce système est constitué des 2 angles suivants :

- l'angle horaire H qui amène le méridien du lieu sur le méridien contenant la direction de l'astre \vec{u} . Cette rotation est comptée positive dans le sens horaire, c'est-à-dire *dans le sens trigonométrique rétrograde*, d'où en notant α l'ascension de l'astre et α_A celle du lieu :

$$H = \alpha_A - \alpha \iff \alpha = \alpha_A - H \quad (5.9)$$

- la déclinaison δ déjà définie dans le repère équatorial R_C .

Les habitués du sens trigonométrique direct peuvent considérer que l'angle horaire mesure l'ascension droite du méridien local à partir du méridien de l'étoile.

Dans un repère mixte équatorial-méridien local, les cosinus directeurs de \vec{u} s'écrivent :

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos H \cos \delta \\ -\sin H \cos \delta \\ \sin \delta \end{pmatrix}$$

Cette direction étant donné, il y a deux couples de coordonnées horaires qui lui correspondent :

- la solution principale telle que $|\delta| \leq 90^\circ$ et qui est donnée par $\begin{cases} \delta = \arcsin(w) \\ H = \text{atan2}(-v, u) \end{cases}$
- la solution secondaire telle que $|\delta'| > 90^\circ$ et qui est donnée par $\begin{cases} \delta' = 180^\circ - \delta \\ H' = H \pm 180^\circ \end{cases}$

Lorsqu'on pointe une monture équatoriale sur une étoile, la barre des contre-poids doit être dirigée vers le bas pour garantir le bon équilibre de la monture, ce qui est obtenu lorsque $|H| < 90^\circ$. En conséquence, on choisit, entre les deux solutions, celle qui dirige la barre des contre-poids vers le bas. Si $H > 90^\circ$ on prend $H' = H - 180^\circ$, et si $H < -90^\circ$ on prend $H' = H + 180^\circ$ avec dans ces deux cas $\delta' = 180^\circ - \delta$.

5.7 Passage entre coordonnées horaires équatoriales et coordonnées horizontales

On a les relations suivantes entre les cosinus directeurs de \vec{u} dans \mathcal{B}_C et dans \mathcal{B}_A :

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha_A - H) \cos \delta \\ \sin(\alpha_A - H) \cos \delta \\ \sin \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha_A \sin \varphi_A & -\sin \alpha_A \cos \alpha_A \cos \varphi_A \\ \sin \alpha_A \sin \varphi_A & \cos \alpha_A \sin \alpha_A \cos \varphi_A \\ -\cos \varphi_A & 0 \sin \varphi_A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos a \cos h \\ -\sin a \cos h \\ \sin h \end{pmatrix}$$

En utilisant les 3 matrices de rotation élémentaires (voir la relation 5.7), elle s'écrit :

$$R_Z(\alpha_A - H) \begin{pmatrix} \cos \delta \\ 0 \\ \sin \delta \end{pmatrix} = R_Z(\alpha_A) R_Y\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_A\right) \begin{pmatrix} \cos a \cos h \\ -\sin a \cos h \\ \sin h \end{pmatrix}$$

On voit qu'en pré-multipliant par $R_Z(-\alpha_A)$, on élimine l'angle α_A d'où :

$$R_Z(-H) \begin{pmatrix} \cos \delta \\ 0 \\ \sin \delta \end{pmatrix} = R_Y\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_A\right) R_Z(-a) \begin{pmatrix} \cos h \\ 0 \\ \sin h \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire :

$$\begin{pmatrix} \cos H \cos \delta \\ -\sin H \cos \delta \\ \sin \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \varphi_A & 0 & \cos \varphi_A \\ 0 & 1 & 0 \\ -\cos \varphi_A & 0 & \sin \varphi_A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos a \cos h \\ -\sin a \cos h \\ \sin h \end{pmatrix}$$

soit :

$$\begin{pmatrix} \cos H \cos \delta \\ -\sin H \cos \delta \\ \sin \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \varphi_A \cos a \cos h + \cos \varphi_A \sin h \\ -\sin a \cos h \\ -\cos \varphi_A \cos a \cos h + \sin \varphi_A \sin h \end{pmatrix} \quad (5.10)$$

On retrouve ainsi les deux formules de passage utilisées par les astronomes :

$$\tan H = \frac{\sin a \cos h}{\sin \varphi_A \cos a \cos h + \cos \varphi_A \sin h}$$

$$\sin \delta = \sin \varphi_A \sin h - \cos \varphi_A \cos a \cos h$$

Attention : Dans le cas de la marine (azimut par rapport au Nord), en changeant les signes des sin et cos de a , ces formules s'écrivent :

$$\tan H = \frac{-\sin a \cos h}{-\sin \varphi_A \cos a \cos h + \cos \varphi_A \sin h}$$

$$\sin \delta = \sin \varphi_A \sin h + \cos \varphi_A \cos a \cos h$$

Remarque : Utiliser la fonction $\text{Atan2}(\text{numérateur}, \text{dénominateur})$ pour calculer H à 2π près. Dans l'expression de la tangente de H on n'a pas divisé en haut et en bas par $\cos h$, car cela fausserait la formule en Atan2 si h dépasse 90° .

Inversement on a :

$$\begin{pmatrix} \cos a \cos h \\ -\sin a \cos h \\ \sin h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \varphi_A & 0 & -\cos \varphi_A \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos \varphi_A & 0 & \sin \varphi_A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos H \cos \delta \\ -\sin H \cos \delta \\ \sin \delta \end{pmatrix}$$

soit :

$$\begin{pmatrix} \cos a \cos h \\ -\sin a \cos h \\ \sin h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \varphi_A \cos H \cos \delta - \cos \varphi_A \sin \delta \\ -\sin H \cos \delta \\ \cos \varphi_A \cos H \cos \delta + \sin \varphi_A \sin \delta \end{pmatrix} \quad (5.11)$$

relation qui fournit les deux formules de passage utilisées par les astronomes :

$$\begin{aligned} \tan a &= \frac{\sin H}{\sin \varphi_A \cos H - \cos \varphi_A \tan \delta} \\ \sin h &= \cos \varphi_A \cos H \cos \delta + \sin \varphi_A \sin \delta \end{aligned} \quad (5.12)$$

Remarque : Utiliser la fonction $\text{Atan2}(\text{numérateur}, \text{dénominateur})$ pour calculer a à 2π près.

Attention : Dans le cas de la marine, en changeant les signes des sin et cos de a , ces formules s'écrivent :

$$\begin{aligned} \tan a &= \frac{-\sin H}{\cos \varphi_A \tan \delta - \sin \varphi_A \cos H} \\ \sin h &= \cos \varphi_A \cos H \cos \delta + \sin \varphi_A \sin \delta \end{aligned} \quad (5.13)$$

et même remarque pour le calcul de a .

Dans la bibliothèque GNU Octave associée à ce document on trouvera les fonctions `hori2hour` et `hour2hori` qui permettent de convertir les coordonnées horizontales en horaires équatoriales et inversement.

5.8 Temps sidéral - Orientation de la Terre

Le temps sidéral de Greenwich est l'angle horaire (par rapport au méridien de Greenwich) du point γ . Cet angle est compté positif dans le sens rétrograde. Il est algébriquement égal à l'ascension droite α_G du méridien de Greenwich qui elle est comptée positive dans le sens direct. Effectivement, en permutant origine et destination et en changeant le sens, on retrouve la même valeur algébrique.

C'est ce temps qui est utilisé pour préciser l'angle du globe terrestre moyen. On le notera T_{SG} :

$$T_{SG} = \alpha_G = \angle(\vec{x}_\gamma, \vec{x}_G)$$

Le temps sidéral local en un lieu A est l'angle horaire en ce lieu du point γ . On le note T_{SA} . C'est également l'ascension droite $\alpha_A = \alpha_G + L_A$ du méridien de ce lieu dont la longitude est notée L_A :

$$T_{SA} = T_{SG} + L_A = \alpha_A$$

Il en résulte que l'angle Horaire H d'un astre et le temps sidéral local T_{SA} sont liés par :

$$H + \alpha = T_{SA} = \alpha_A$$

Connaissant l'ascension droite α d'une étoile (calculée dans le repère équatorial de la date considérée), la mesure de son angle horaire H permet de calculer le temps sidéral du lieu, et inversement connaissant T_{SA} , la mesure de H permet de calculer α .

Remarquons que la position du Soleil n'intervient en aucune manière dans la définition de ce temps. Seule intervient l'orientation de la Terre par rapport à la ligne des équinoxes.

On distingue deux temps sidéraux : le temps sidéral moyen qui est relatif au point γ_m moyen et le temps sidéral apparent qui est relatif au point γ vrai.

5.8.1 Temps sidéral moyen de Greenwich

L'ascension droite du méridien de Greenwich par rapport au point γ_m moyen (intersection du plan écliptique moyen et du plan équatorial moyen de la date considérée) était donnée le 1/1/2000 à 12h temps universel TU (J2000.0) par :

$$T_{MSG_{J2000}} = 280.46061837 \frac{\pi}{180} \quad (5.14)$$

La *vitesse de rotation sidérale* moyenne est la vitesse de rotation de la Terre par rapport à la direction du point vernal moyen γ_m (qui précessionne de manière plus régulière que le point γ vrai). Soit $D_{trop} = 365.2421904$ la durée d'une année tropique en jours solaires (moyens ou vrais qui sont les mêmes pour cette durée). D_{trop} est aussi le nombre de tours qu'à fait la Terre par rapport au Soleil. Mais durant cette période la Terre à fait $D_{trop} + 1$ tours par rapport au point vernal moyen γ_m puisque chaque jour solaire moyen celui-ci avance de $1/D_{trop}$ tour sur la sphère céleste pour se retrouver au bout d'une année tropique à sa place initiale. La vitesse de rotation sidérale est donc de :

$$\Omega_S = \frac{(D_{trop} + 1)}{D_{trop}} = 1.0027379093 \times \text{tours/jour solaire moyen} \quad (5.15)$$

à convertir en rad/jour.

Remarque : Cette vitesse de rotation sidérale n'est pas la vitesse de rotation stellaire (vitesse de rotation de la Terre par rapport aux étoiles). Un jour sidéral (retour de γ_m dans le plan du méridien du lieu) est plus court d'environ 0.009s qu'un jour stellaire (retour d'une étoile fixe dans le plan du méridien du lieu), ce qui fait 3.36s par an qui représentent les $3.36 \times 15 = 50'' .3$ de degré de recul annuel du point γ_m .

Si JU est le jour julien d'une date donnée en UT à Greenwich, on a l'approximation suivante pour le temps sidéral moyen de Greenwich :

$$T_{MSG} = \alpha_{mG} = T_{MSG_{J2000}} + \Omega_S(JU - J2000) + T^2 \frac{\pi}{180} (0.000387933 - \frac{T}{38710000}) \quad (5.16)$$

avec $J2000 = 2451545.0$ et $T = \frac{JU - J2000.0}{36525}$ en siècles juliens (cf. [4] et [5]).

Si on calcule T_{MSG} pour le 1/1/2000 à 0h TU, on trouve 99.967795° , soit 6h39mn52.3s.

Remarques :

- Nous avons laissé les valeurs numériques en degrés telles qu'elles apparaissent dans [5, 4] mais en ajoutant les facteurs de conversion qui permettent de les exprimer en radians.
- Contrairement à toutes les fonctions du temps données dans les autres chapitres pour spécifier les changements entre repères quasi-fixes ou spécifier les positions des planètes, satellites, Soleil, Terre, Lune ou les directions des étoiles, où le temps utilisé est celui des éphémérides, les fonctions du temps utilisées pour spécifier l'orientation de la Terre le sont en fonction du temps universel. *C'est un des rares cas où on n'utilise pas le temps des éphémérides.*

En calcul simple précision, l'utilisation de cette formule pour une date éloignée de J2000, risque de donner une valeur de T_{MSG} relativement imprécise. En effet, si les calculs sont fait avec 7 chiffres décimaux significatifs, en 2027, 10000 jours après J2000, la précision sur le terme $\Omega_S(JU - J2000)$ ne sera plus que de 3 chiffres significatifs, soit de $43.2/\pi =$ secondes, ce qui représente une erreur de 14 secondes de temps environ.

Si on ne dispose pas des calculs en double précision, la formule suivante, issue de [5, 4] ou [1], qui donne le temps sidéral moyen à Greenwich, tous les jours, **mais seulement à 0h TU exactement** est plus indiquée :

$$T_{MSG(0hTU)} = \frac{\pi}{180} (100.46061837 + 36000.77005361T + 0.000387933T^2 - \frac{T^3}{38710000})$$

Ici, T étant exprimé en siècles vaudra autour de 0.27 pendant l'année 2027 avec une précision d'environ 7 chiffres décimaux. Le produit $36000.77005361T$ va donner un angle en degré de l'ordre de 10000° avec 7 chiffres significatifs, soit au millièmes de degré près, c'est-à-dire à $43.2/180 = 0.24$ seconde près. Ensuite connaissant l'heure TU exacte, soit h_s exprimée par exemple en secondes depuis 0h (minuit), l'heure sidérale à n'importe quelle heure de la journée sera obtenue en ajoutant $\Omega_S h_s$ à $T_{MSG(0hTU)}$.

Remarques :

- $T = 0$, correspond au 1/1/2000 à **12h** TU et non **0h** TU. Le temps sidéral moyen à Greenwich le 1/1/2000 à 0h TU vaut comme nous l'avons vu plus haut 99.967795° , soit 6h39mn52.3s.
- Si on cherche par approximations successives l'instant de l'an 2000 où il y a eu coïncidence entre l'heure sidérale et l'heure TU, on trouve une date proche de l'équinoxe d'automne vers 20 Septembre, alors que l'équinoxe s'est produite le 22 Septembre à 17h28m40s. A cette date l'heure TU et l'heure sidérale sont égales à 4 minutes près. Ainsi pour calculer l'heure sidérale de manière approximative, on peut considérer qu'il y a coïncidence avec l'heure TU la journée du 20 septembre, puis on ajoutera 3m56s par jour à partir de cette coïncidence pour obtenir l'heure sidérale à partir de l'heure TU.

Dans la bibliothèque GNU Octave associée à ce document on trouvera les fonctions `jul2gst0_rd`, `jul2gst1_rd` et `jul2mgst_rd` qui permettent de calculer ce temps sidéral.

5.8.2 Temps sidéral apparent

Le temps sidéral apparent est l'angle horaire $T_{ASG} = \alpha_G$ à Greenwich du **point γ vrai** (intersection du plan écliptique moyen et du plan équatorial vrai) **de la date considérée** (utiliser le qualificatif d'apparent pour le temps sidéral associé au point γ qualifié de vrai est quelque peu troublant !).

La différence entre le temps sidéral apparent et le temps sidéral moyen s'appelle **l'équation des équinoxes** :

$$EQ_{equinox} = T_{ASG} - T_{MSG}$$

Dans la base équatoriale moyenne \mathcal{B}_M , notons $\begin{pmatrix} \cos \alpha_{mG} \\ \sin \alpha_{mG} \\ 0 \end{pmatrix}$ les cosinus directeurs du vecteur unitaire \vec{x}_G du repère de Greenwich. Dans la base équatoriale vraie \mathcal{B}_V , il aura pour cosinus directeurs :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \cos \alpha_G \\ \sin \alpha_G \\ \dots \end{pmatrix} &\simeq \begin{pmatrix} 1 & -\Delta\psi \cos \varepsilon & -\Delta\psi \sin \varepsilon \\ \Delta\psi \cos \varepsilon & 1 & -\Delta\varepsilon \\ \Delta\psi \sin \varepsilon & \Delta\varepsilon & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha_{mG} \\ \sin \alpha_{mG} \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\simeq \begin{pmatrix} \cos \alpha_{mG} - \Delta\psi \cos \varepsilon \sin \alpha_{mG} \\ \sin \alpha_{mG} + \Delta\psi \cos \varepsilon \cos \alpha_{mG} \\ \dots \end{pmatrix} \\ &\simeq \begin{pmatrix} \cos (\alpha_{mG} + \Delta\psi \cos \varepsilon) \\ \sin (\alpha_{mG} + \Delta\psi \cos \varepsilon) \\ \dots \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ces coordonnées montrent que :

$$EQ_{equinox} \simeq \Delta\psi \cos \varepsilon$$

où la variation de longitude écliptique $\Delta\psi$ est donnée par 3.21 et où $\varepsilon = \bar{\varepsilon} + \Delta\varepsilon$.

Pour plus de précision (quelques centaines de microsecondes de temps), il faut prendre en compte l'action de la Lune qui modifie la vitesse de rotation de la Terre, ce qui conduit à l'équation des équinoxes suivante :

$$EQ_{equinox} \simeq \Delta\psi \cos \varepsilon + 0.00264'' \sin \Omega + \dots$$

où Ω est la longitude moyenne du nœud ascendant de l'orbite lunaire donnée par 3.24.

Généralement on pose :

$$\Delta eq_{equinox} = 0.00264'' \sin \Omega + \dots \quad (5.17)$$

d'où :

$$T_{ASG} = T_{MSG} + \Delta\psi \cos \varepsilon + \Delta eq_{equinox} \quad (5.18)$$

Ce temps sidéral apparent est celui qui doit être utilisé pour calculer l'angle horaire d'une étoile à partir de ses coordonnées équatoriales vraies (ou mieux apparentes), angle qui permettra ensuite de calculer les coordonnées horizontales de l'étoile.

Dans la bibliothèque GNU Octave associée à ce document on trouvera la fonction `jul2agst_rd` qui calcule ce temps sidéral apparent pour Greenwich..

5.9 Lever et coucher d'un astre

5.9.1 Instant de passage au méridien (transit)

A l'instant du passage d'un astre par le méridien du lieu, parfois appelé le *transit*, l'angle horaire H de l'astre est nul. Autrement dit, l'ascension droite α de l'astre est égale à celle l'ascension droite α_A du méridien du lieu qui est par ailleurs définie par :

$$\alpha_A = T_{SA} = T_{SG} + L_A$$

où L_A est la latitude du lieu et T_{SG} est le temps sidéral de Greenwich.

C'est l'égalité $\alpha_A = \alpha$ à l'instant du transit qui est exploitée pour calculer cet instant. Étant donné un instant t_{ini} , on calcule les valeurs correspondantes de α_A et de α , et on déduit de leur écart le temps de rotation de la Terre nécessaire à réaliser l'égalité. En ajoutant cet écart, on déduit un nouvel instant, et on recommence le processus

jusqu'à ce que l'écart $|\alpha_A - \alpha|$ soit négligeable. Dans le cas d'une étoile α étant quasiment une constante, il n'y a pas à itérer, le premier instant trouvé est le bon.

Notons ju le jour julien (en temps universel UT) où est recherché l'instant de passage au méridien du lieu et t_{ini} une valeur estimée de cet instant. Pour une convergence vers un instant situé le jour ju , il faut choisir t_{ini} tel que la solution recherchée soit située à moins de 12h de sa valeur. Si l'astre est le Soleil on pourra prendre pour t_{ini} la valeur $\text{floor}(ju + 0.5)$ qui correspond à l'instant 12h du jour considéré (allant de 0h à 23h59). Si c'est une étoile on pourra prendre $\text{floor}(ju + 0.5) + 0.5$ qui correspond à l'instant 24h du jour considéré (allant de 0h à 23h59).

A partir de t_{ini} on calcule les coordonnées équatoriales (α, δ) de l'astre à cet instant¹ et α_{Aini} l'ascension droite du méridien du lieu à cet instant, à partir de sa latitude L_A et de T_{SGini} calculé par les formules 5.18 et 5.16. Si $\alpha_{Aini} = \alpha$ à 2π près, l'instant t_{ini} est l'instant recherché.

Généralement ce ne sera pas le cas, et à partir de l'écart :

$$\Delta\alpha = \alpha - \alpha_{Aini} \text{ ramené dans } [-\pi, \pi]$$

On calcule la durée :

$$\Delta t = \frac{\Delta\alpha}{\Omega_S}$$

de la rotation de la Terre pour que le méridien du lieu passe par celui qui contient l'étoile. L'instant de passage estimé est alors :

$$t_{transit} = t_{ini} + \Delta t$$

mais comme il ne correspond pas à l'instant de calcul des coordonnées (α, δ) qui ont pu varier pendant ce temps (pratiquement pas dans le cas d'une étoile, mais nettement dans le cas de la Lune), on itère le calcul : à partir de l'instant² $t_{transit}$ on calcule les coordonnées (α, δ) , puis $\Delta\alpha$, puis Δt , puis la nouvelle valeur de $t_{transit}$, et ainsi de suite. On arrête le processus lorsque les variations de valeur de $t_{transit}$ deviennent insignifiantes.

5.9.2 Instants de lever et coucher

Pour les lever et coucher de l'astre, on exploite en outre la dernière ligne de la relation 5.12 qui permet d'écrire :

$$\cos H = \frac{\sin h_0 - \sin \varphi_A \sin \delta}{\cos \varphi_A \cos \delta} \quad (5.19)$$

Cette relation permet de calculer les angles horaires $H = \pm \arccos(\cos H)$ de l'astre aux instants cherchés (signe - pour le lever et signe + pour le coucher) en fonction de δ . Le terme h_0 représente les hauteurs de l'astre au lever ou au coucher qui sont a priori égales.

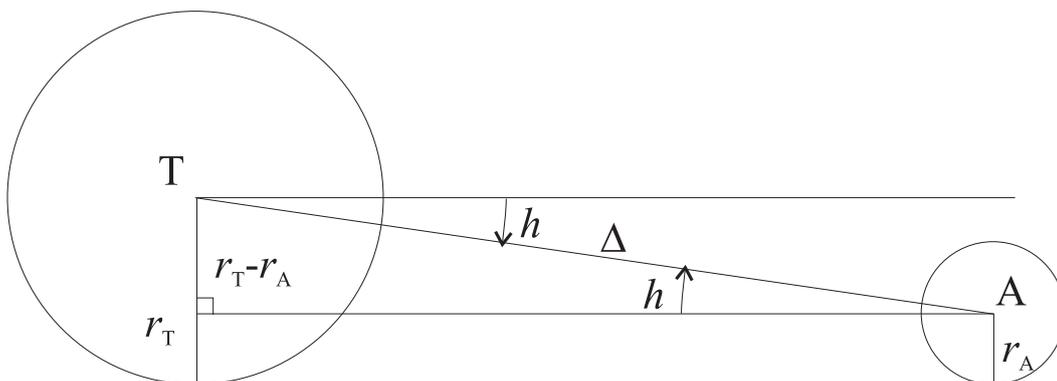


Figure 5.5: Apparition d'un astre à l'horizon

Pour une étoile et une planète, on prend l'opposé de la valeur de la réfraction au niveau de l'horizon :

$$h_0 = -h_{refrac0} = -0^\circ.5667 \text{ étoiles et planètes}$$

Le diamètre apparent du Soleil n'est pas négligeable. Considérons sur la figure 5.5 la valeur de la hauteur h au moment où le bord du disque de l'astre vient tangenter le plan horizontal local. A ce moment là on a :

$$\sin h = \frac{r_T - r_A}{\|TA\|}$$

¹Ajouter l'écart Δt = si les coordonnées sont exprimées en fonction du temps des éphémérides.

²Ajouter l'écart Δt = si les coordonnées sont exprimées en fonction du temps des éphémérides.

d'où :

$$h_0 = \arcsin\left(\frac{r_T - r_A}{\|TA\|}\right) - h_{refrac0}$$

où r_T est la distance du plan horizontal local au centre de la Terre, r_A est le rayon de l'astre et $\|TA\|$ la distance centre Terre - centre Astre. Si, en première approximation, on prend les valeurs moyennes de ces grandeurs on trouve :

$$h_0 = -0.8333 \text{ Soleil}$$

Généralement cette valeur est connue sous la forme $50' = 34' + 16'$ où $34'$ est la valeur de la réfraction au niveau de l'horizon pour l'étoile (Soleil) et $16'$ est le rayon du Soleil. Le bord du Soleil situé à $16'$ de son centre vient tangenter l'horizon grâce aux $34'$ de réfraction.

Le problème pour la Lune est plus complexe, car du fait de sa proximité, l'erreur de parallaxe due à la position de l'observateur sur Terre n'est plus négligeable. Pour un observateur situé sous nos latitudes, on peut prendre, pour la Lune l'approximation suivante :

$$h_0 = +0.125 \text{ Lune}$$

En utilisant ces valeurs de h_0 dans la relation 5.19, on déduit une valeur de H qui positionne l'ascension droite du méridien du lieu à :

$$\alpha_A = H + \alpha$$

et non pas α_{Aini} . Comme précédemment, à partir de l'écart :

$$\Delta\alpha = \alpha_A - \alpha_{Aini} \text{ ramené dans } [-\pi, \pi]$$

on calcule la durée :

$$\Delta t = \frac{\Delta\alpha}{\Omega_S}$$

de la rotation de la Terre pour que le méridien du lieu soit égal à la valeur correspondante. L'instant de lever ou coucher estimé est alors :

$$t = t_{ini} + \Delta t$$

Le processus doit être itéré avec des valeurs différentes de t pour le lever et le coucher. On calcule les coordonnées $(\alpha_{lever}, \delta_{lever})$ et $(\alpha_{coucher}, \delta_{coucher})$ à partir de t_{lever} et $t_{coucher}$ calculés le premier avec H négatif et le second avec H positif, puis, on recalcule :

$$H_{lever} = -\arccos\left(\frac{\sin h_0 - \sin \varphi_A \sin \delta_{lever}}{\cos \varphi_A \cos \delta_{lever}}\right)$$

$$H_{coucher} = +\arccos\left(\frac{\sin h_0 - \sin \varphi_A \sin \delta_{coucher}}{\cos \varphi_A \cos \delta_{coucher}}\right)$$

puis :

$$t_{lever} = t_{ini} + \frac{H_{lever} + \alpha_{lever} - \alpha_{Aini}}{\Omega_S}$$

$$t_{coucher} = t_{ini} + \frac{H_{coucher} + \alpha_{coucher} - \alpha_{Aini}}{\Omega_S}$$

en faisant attention à ramener l'écart $\Delta\alpha$ entre $-\pi$ et π et ainsi de suite jusqu'à ce que les valeurs des instants trouvées ne varient plus de manière significative.

Remarque : En faisant $H = 0$ dans l'expression 5.19, on obtient la relation qui fournit la hauteur au passage au méridien :

$$\sin h = \cos \varphi_A \cos \delta + \sin \varphi_A \sin \delta = \cos(\varphi_A - \delta)$$

c'est-à-dire :

$$h = \frac{\pi}{2} - |\varphi_A - \delta|$$

Si $\frac{\pi}{2} - |\varphi_A - \delta| > h_0$ l'astre est toujours au-dessus de l'horizon et si $\frac{\pi}{2} - |\varphi_A - \delta| < h_0$ l'astre est toujours en dessous de l'horizon. Dans ces deux cas les arccos fournissant H_{lever} et $H_{coucher}$ sont inexploitable. Il faut donc vérifier que l'argument de chaque arccos calculé est inférieur ou égal à 1 en valeur absolue avant de l'utiliser. Si ce n'est pas le cas, il n'y a ni lever, ni coucher.

Les azimuts au lever ou au coucher sont obtenus en fonction de $H = H_{lever}$ ou de $H = H_{coucher}$, à partir des relations 5.11, soit :

$$a = \text{atan2}(\sin H, \sin \varphi_A \cos H - \cos \varphi_A \tan \delta)$$

ou bien :

$$a = \pm \arccos \left(\frac{\sin \varphi_A \cos H \cos \delta - \cos \varphi_A \sin \delta}{\cos h_0} \right)$$

en prenant le signe - pour le lever et + pour le coucher (dans le cas de la convention rétrograde pour l'azimut).

Remarque : Lorsque les heures H_{lever} et $H_{coucher}$ ont lieu de jour, l'astre n'est généralement pas visible, à l'exception de la Lune et éventuellement de Vénus ou Jupiter qui parfois sont visibles après le lever du Soleil ou avant son coucher.

5.9.3 Crépuscules civil, nautique, astronomique

Nous venons de voir que l'instant de lever ou coucher du Soleil correspondait au moment où son centre est à 50' sous l'horizon.

Le crépuscule civil est la tranche qui va du lever/coucher à l'instant où le centre du Soleil est situé à 6° sous l'horizon.

Le crépuscule nautique est la tranche de temps pendant laquelle le centre du Soleil est situé entre 6° et 12° sous l'horizon.

Le crépuscule astronomique est la tranche de temps pendant laquelle le centre du Soleil est situé entre 12° et 18° sous l'horizon.

Dans le langage courant on utilise généralement le mot aube à la place du crépuscule du matin et l'aurore pour l'instant du lever du Soleil. Le lever du Soleil désigne généralement la durée pendant laquelle le disque solaire apparaît.

Chapitre 6

Modélisation des orbites elliptiques

Dans le cas de deux corps isolés dans l'espace, chacun orbite autour de l'autre en parcourant par rapport à l'autre une ellipse dont cet autre occupe un des foyers. En première approximation, en négligeant l'influence des autres corps, c'est le cas des satellites artificiels et de la Lune qui orbitent autour de la Terre et des planètes qui orbitent autour du Soleil.

6.1 Géométrie de l'ellipse

La figure 6.1 représente l'orbite elliptique d'un satellite S orbitant autour de la Terre T située à un des foyers de l'ellipse. La figure est identique dans le cas d'une planète orbitant autour du Soleil.

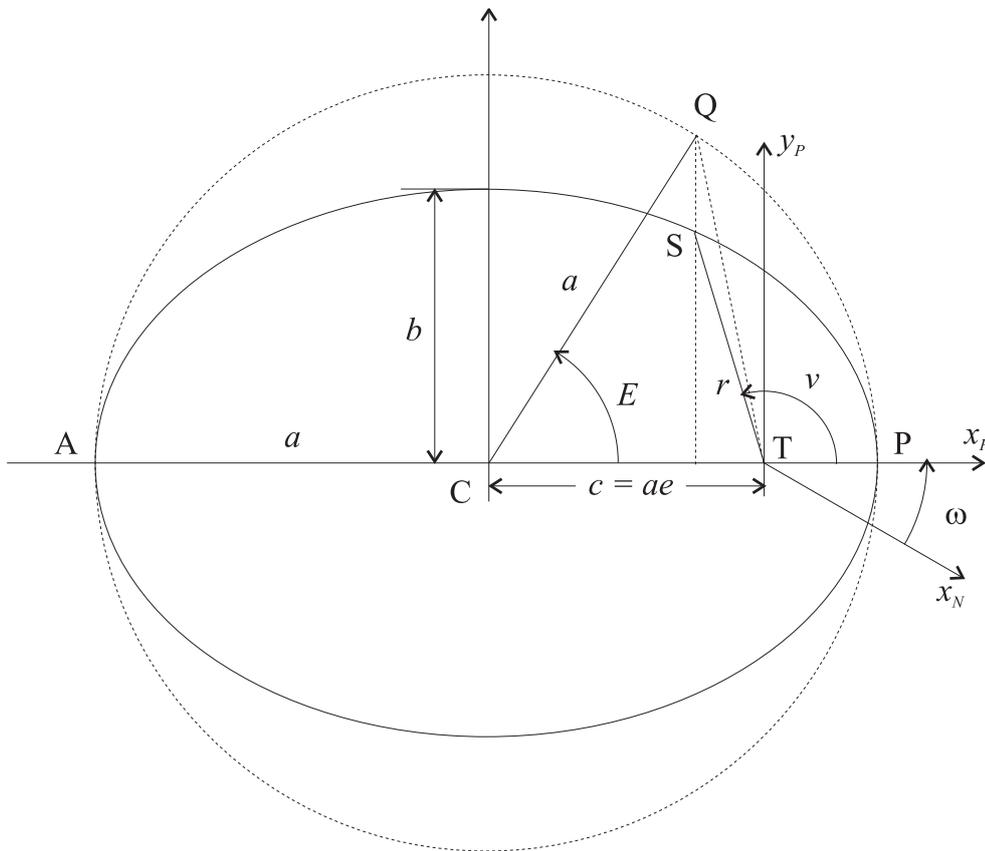


Figure 6.1: Éléments orbitaux dans le plan

Sur cette figure :

- E est l'*anomalie excentrique*, angle au centre repérant le point Q projection orthogonale de S sur le cercle de rayon a demi-grand axe de l'ellipse : $E = \angle(\vec{x}_P, \vec{CQ})$
- v est l'*anomalie vraie*, argument de S dans le repère $\{T, \vec{x}_P, \vec{y}_P\}$: $v = \angle(\vec{x}_P, \vec{TS})$.

Nous avons établi au paragraphe 5.1 les relations liant a , b , c , e , et p . A partir de a et e on calcule les autres éléments par :

$$\begin{cases} c = ae \\ b = \sqrt{a^2 - c^2} = a\sqrt{1 - e^2} \\ p = \frac{b^2}{a} = a(1 - e^2) \end{cases}$$

Dans le repère $\{T, \vec{x}_P, \vec{y}_P\}$, les coordonnées de S sont données par :

$$\begin{cases} x = r \cos v = -ae + a \cos E = a(\cos E - e) \\ y = r \sin v = \frac{b}{a} a \sin E = b \sin E \end{cases} \quad (6.1)$$

où nous avons fait intervenir l'homothétie de rapport b/a qui transforme le cercle en ellipse pour la deuxième relation. Il en résulte que :

$$\begin{aligned} r^2 &= (a(\cos E - e))^2 + (b \sin E)^2 \\ &= a^2(1 - e \cos E)^2 \end{aligned}$$

Soit :

$$r = a(1 - e \cos E) \quad (6.2)$$

D'où les relations permettant de calculer v à partir de E :

$$\begin{cases} \cos v = \frac{\cos E - e}{1 - e \cos E} \\ \sin v = \frac{\sqrt{1 - e^2} \sin E}{1 - e \cos E} \end{cases}$$

L'identité remarquable $\tan \frac{a}{2} = \frac{\sin a}{1 + \cos a} = \frac{1 - \cos a}{\sin a}$ donne :

$$\tan \frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan \frac{E}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \frac{\sin E}{1 + \cos E} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \frac{1 - \cos E}{\sin E} \quad (6.3)$$

et les relations réciproques :

$$\begin{cases} \cos E = \frac{e + \cos v}{1 + e \cos v} \\ \sin E = \frac{\sqrt{1 - e^2} \sin v}{1 + e \cos v} \end{cases}$$

et :

$$\tan \frac{E}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \tan \frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \frac{\sin v}{1 + \cos v} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \frac{1 - \cos v}{\sin v} \quad (6.4)$$

Remarque : En remplaçant $\cos E$ dans (6.2), on retrouve l'équation de l'ellipse en coordonnées polaires :

$$r = \frac{p}{1 + e \cos v} \quad (6.5)$$

A titre d'exemple, pour $v = 0$ ou π on trouve les distances $q = TP$ et $Q = TA$, à savoir $q = a(1 - e)$ et $Q = a(1 + e)$.

6.2 L'équation de Kepler

La loi des aires précise que les aires balayées par les rayons vecteurs TS sont proportionnelles au temps.

En notant σ l'aire balayée depuis le périégée (point de l'orbite le plus proche de la Terre, appelé périhélie dans le cas de l'orbite d'une planète autour du Soleil), on définit l'*anomalie moyenne* M par la relation :

$$M = 2\pi \frac{\sigma}{\Sigma}$$

où $\Sigma = \pi ab$ est l'aire de l'ellipse. Le facteur 2π convertit le tour en radian. M est un pseudo-angle représentant l'arc \widehat{PS} qui évolue linéairement en fonction du temps. C'est également l'angle vu de T, compté à partir de P, d'un satellite *moyen* (ou d'une planète *moyenne*) qui tourne régulièrement autour de T dont la position coïncide 2 fois par tour en P et en A avec celle de S, d'où le qualificatif de *moyen* pour M .

Inversement l'aire σ s'obtient à partir de M par :

$$\sigma = \frac{M\pi ab}{2\pi} = \frac{M}{2}ab$$

Dans l'homothétie b/a on a :

$$\sigma = \frac{b}{a}\mathcal{A}(\widehat{\text{TPQ}}) = \frac{b}{a}\left(\mathcal{A}(\widehat{\text{CPQ}}) - \mathcal{A}(\text{CTQ})\right)$$

où $\mathcal{A}(\widehat{\text{TPQ}})$ est l'aire du secteur de centre le foyer T et d'arc de cercle $\widehat{\text{PQ}}$, $\mathcal{A}(\widehat{\text{CPQ}})$ est du secteur de centre C et d'arc de cercle $\widehat{\text{PQ}}$ et $\mathcal{A}(\text{CTQ})$ est l'aire du triangle CTQ. Il en résulte la relation :

$$\frac{M}{2}ab = \frac{b}{a}\left(\frac{1}{2}a^2E - \frac{1}{2}(ae)(a \sin E)\right)$$

d'où :

$$M = E - e \sin E \quad (6.6)$$

qui est l'équation de Kepler qui lie E à M , c'est-à-dire au temps.

En différenciant cette relation on a :

$$dM = dE(1 - e \cos E) \rightarrow dE = \frac{dM}{1 - e \cos E}$$

Si e est petit, on a la solution approchée suivante :

$$E = M + \left(e - \frac{e^3}{8}\right) \sin M + \frac{e^2}{2} \sin 2M + \frac{3e^3}{8} \sin 3M \dots$$

qui montre que $\sin E \simeq \left(1 - \frac{e^2}{8}\right) \sin M + \frac{e}{2} \sin 2M + \frac{3e^2}{8} \sin 3M$

En appelant t_p l'instant de passage au périapside (périgée, périhélie, ...) on pose :

$$M = n(t - t_p) \text{ avec } n = \frac{2\pi}{T}$$

où la constante n est appelée le *mouvement moyen* et où T est la période du parcours de l'orbite.

Remarque : Pour l'équation du centre de l'orbite de la Terre autour du Soleil, on utilise l'approximation suivante pour l'anomaile vraie :

$$v = M + 2\left(e - \frac{1}{8}e^3\right) \sin M + \left(\frac{5}{4}e^2 - \frac{11}{24}e^4\right) \sin 2M + \frac{13}{12}e^3 \sin 3M + \frac{103}{96}e^4 \sin 4M$$

qui montre que si e est très petit $v \simeq M + 2(E - M) \simeq M + 2e \sin E$ d'où l'approximation $v \simeq E + e \sin E$ qui fait le pendant de l'équation de Kepler $M = E - e \sin E$.

Remarque : Dans le cas d'une orbite circulaire $e = 0$, $c = 0$, $a = b = p = r$, et $v = E = M$

Dans la bibliothèque GNU Octave associée à ce document on trouvera la fonction `anoM2anoE` qui résout l'équation de Kepler par itérations et la fonction `anoM2anoV` qui calcule l'anomalie vraie à partir de l'anomalie moyenne.

6.3 Vitesse du corps

En dérivant les relations 6.1 et 6.2, on obtient :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{r} \cos v - r\dot{v} \sin v = -a\dot{E} \sin E \\ \dot{y} &= \dot{r} \sin v + r\dot{v} \cos v = a\dot{E}\sqrt{1-e^2} \cos E \\ \dot{r} &= ae\dot{E} \sin E = -e\dot{x} \end{aligned}$$

où \dot{E} s'obtient en dérivant l'équation de Kepler. Soit :

$$\dot{E} = \frac{n}{1 - e \cos E}$$

En reportant cette valeur dans les expressions précédentes, Elles deviennent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = -\frac{a^2n}{r} \sin E = -\frac{an}{\sqrt{1-e^2}} \sin v \\ \dot{y} = \frac{a^2n}{r} \sqrt{1-e^2} \cos E = \frac{an}{\sqrt{1-e^2}} (e + \cos v) \end{array} \right.$$

Considérons la constante :

$$V_0 = \frac{an}{\sqrt{1-e^2}} \quad (6.7)$$

Il vient :

$$\begin{cases} \dot{x} = -V_0 \sin v \\ \dot{y} = V_0 (e + \cos v) \end{cases}$$

En combinant les relations précédentes, on obtient les vitesses tangentielles et radiales :

$$\begin{cases} r\dot{v} = V_0 (1 + e \cos v) \\ \dot{r} = eV_0 \sin v \end{cases}$$

Remarque : La vitesse exprimée en cartésien montre qu'elle se décompose en deux termes :

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = V_0 \begin{pmatrix} -\sin v \\ \cos v \end{pmatrix} + eV_0 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (6.8)$$

le terme principal de module V_0 normal au rayon vecteur (dirigé à $+\pi/2$ du rayon vecteur) et le terme secondaire de module eV_0 normal au grand axe (dirigé à $+\pi/2$ du périhélie).

6.4 Étapes du calcul de la position dans le plan de l'ellipse

Il en résulte que pour calculer la position de S à un instant t , on procède aux étapes suivantes :

1. Évaluer l'anomalie moyenne M en fonction de t (simple loi linéaire puisque M est proportionnel à t).
2. Calculer E en résolvant l'équation de Kepler 6.6

3. Calculer directement les coordonnées cartésiennes x et y par $\begin{cases} x = a(\cos E - e) \\ y = b \sin E \end{cases}$

4. Ou bien, calculer les coordonnées polaires r et v par $r = a(1 - e \cos E)$

$$\text{et } \begin{cases} \cos v = \frac{\cos E - e}{1 - e \cos E} \\ \sin v = \frac{\sqrt{1-e^2} \sin E}{1 - e \cos E} \end{cases} \quad \text{ou } \tan \frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan \frac{E}{2}$$

5. et calculer les coordonnées cartésiennes x et y par $\begin{cases} x = r \cos v \\ y = r \sin v \end{cases}$

6.5 Inversion de la position sur orbite

Contrairement au calcul de l'anomalie vraie v en fonction du temps qui n'est pas analytique et demande la résolution de l'équation de Kepler, le passage de cet angle à l'instant t correspondant est direct :

$$1. \text{ Calcule de l'anomalie excentrique } E \begin{cases} \cos E = \frac{e + \cos v}{1 + e \cos v} \\ \sin E = \frac{\sqrt{1-e^2} \sin v}{1 + e \cos v} \\ E = \text{atan2}(\sin E, \cos E) \end{cases}$$

2. Calcule de l'anomalie moyenne $M = E - e \sin E$

3. Calcul de l'instant $t = t_p + \frac{M}{n}$

Chapitre 7

Planètes, Soleil, Lune

Ce chapitre présente les équations qui permettent de situer les planètes et la Lune. Elles sont basées sur une modélisation de leurs trajectoires au moyen d'ellipses dont le Soleil dans le cas des planètes, ou la Terre dans le cas de la lune occupe un des foyers. Les paramètres qui permettent de situer le plan contenant l'ellipse, la forme de l'ellipse et la position de la planète ou satellite sur l'ellipse sont généralement variables. Dans chaque cas tous les paramètres sont calculés à partir de 6 paramètres principaux appelés les éléments orbitaux qui sont modélisés par des expressions analytiques en fonction du temps des éphémérides.

7.1 Position des planètes

On considère ici les 8 planètes qui décrivent une orbite elliptique autour du Soleil qui occupe un des foyers des ellipses. Leur position est généralement calculée relativement au repère écliptique moyen héliocentrique de la date, ou de l'époque J2000. Les paramètres sont donnés relativement au temps des éphémérides TE (que nous confondons à notre niveau avec les temps dynamiques TDT, TBT et le temps terrestre TT). Il est lié au temps universel TU , par la relation $TE = TU + \Delta T$.

Les distances sont exprimées en unités astronomiques (UA). Lors de son assemblée générale tenue à Pékin, du 20 au 31 août 2012, l'Union astronomique internationale (UAI) a défini en pour l'unité astronomique UA la valeur conventionnelle suivante :

$$UA = 149597870700m$$

7.1.1 Les éléments orbitaux

Notons $B_N = \{\vec{x}_N, \vec{y}_N, \vec{z}_N\}$ une base intermédiaire permettant de situer l'orientation de l'ellipse, avec :

- \vec{z}_N normal au plan de l'ellipse faisant avec la normale \vec{z}_E à l'écliptique un *angle aigu* i appelé ***inclinaison de l'orbite*** : $i = \angle(\vec{z}_E, \vec{z}_N)$,
- \vec{x}_N selon \overrightarrow{ON} où O est le centre du Soleil et ***N est le nœud ascendant de l'orbite***. C'est le point où la trajectoire de la planète coupe le plan de l'écliptique en passant du côté sud écliptique au côté nord écliptique.

Le nœud ascendant est repéré par sa longitude écliptique $\Omega = \angle(\vec{x}_\gamma, \vec{x}_N)$, angle appelé ***longitude du nœud ascendant***.

La matrice de passage de \mathcal{B}_E à \mathcal{B}_N est donnée par :

$$R_{EN} = R_Z(\Omega) R_X(i) = \begin{pmatrix} \cos \Omega & -\sin \Omega & 0 \\ \sin \Omega & \cos \Omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos i & -\sin i \\ 0 & \sin i & \cos i \end{pmatrix}$$
$$R_{EN} = \begin{pmatrix} \cos \Omega & -\cos i \sin \Omega & \sin i \sin \Omega \\ \sin \Omega & \cos i \cos \Omega & -\sin i \cos \Omega \\ 0 & \sin i & \cos i \end{pmatrix}$$

Dans le plan (\vec{x}_N, \vec{y}_N) , le grand axe de l'ellipse est selon la direction \overrightarrow{OP} de vecteur unitaire \vec{x}_P (P est le périhélie, point de l'orbite le plus proche du Soleil).

L'angle :

$$\omega = \angle(\vec{x}_N, \vec{x}_P)$$

est appelé ***argument du périhélie***.

7.1.1.1 Caractéristiques orbitales approchées

Nous donnons en 7.1 un tableau des caractéristiques orbitales approchées des huit planètes à l'époque J2000.

	Mercure	Vénus	Terre	Mars
Ω	48°.3	76°.7	0	49°.6
i	7°	3°.4	0	1°.85
a (UA)	0.387	0.723	1	1.524
e	0.206	0.0068	0.0167	0.093
ω	29°.12	54°.85	102°.9	286°.5
τ (jours)	87.969	224.7	365.25636	686.97
t_p	22/1/2015	18/4/2015	4/1/2015 6:36	12/12/2014
	Jupiter	Saturne	Uranus	Neptune
Ω	100°.4	113°.7	74°	131.8
i	1°.305	2°.484	0°.77	1°.77
a (UA)	5.202	9.555	19.2	30.1
e	0.048	0.055	0.046	0.0086
ω	274°	338.8°	98°	276°
τ (jours)	4332.6	10759.2	30688.5	60182
t_p	17/03/2011	26/7/2003	21/5/1966	21/06/1883

Table 7.1: Caractéristiques orbitales approchées de planètes

Pour la Terre, l'inclinaison i étant nulle par définition de l'écliptique, le nœud ascendant, Ω et ω ne sont pas définis, seule la somme $\Omega + \omega$ l'est. Nous avons arbitrairement choisi $\Omega = 0$ et affecté la valeur de la somme à ω .

Les dates de passage au périhélie sont toujours délicates à préciser car comme nous l'avons déjà mentionné les extrémums sont délicats à localiser. De plus pour les planètes intérieures, la fréquence de ces passages est plus élevée en s'approchant du Soleil, ce qui rend augmente l'imprécision sur la date de passage en s'éloignant de la dernière date mesurée.

La distance de Neptune au Soleil présente des variations multiples qui rendent délicates la détection de son périhélie. L'instant de passage donné dans ce tableau a été interpolé à partir des éléments de la table 7.3 donnés ci-après.

Les éléments de cette table 7.1 permettent d'obtenir la position approximative des planètes pour des dates contemporaines en utilisant la méthode décrite pour les satellites de la Terre au paragraphe 9.2. Les méthodes de calcul plus précises présentées ci-après utilisent des éléments orbitaux légèrement différents.

7.1.1.2 Les éléments orbitaux des planètes

Les éléments orbitaux des planètes (à l'exception de ceux de la Terre) comprennent des longitudes *bâtardes* composées de la somme de 2 angles mesurés sur des arcs situés dans deux plans différents, le premier de ces angles est la longitude Ω du nœud ascendant N qui est mesurée dans le plan de l'écliptique et le second est l'argument ω du périhélie P de l'ellipse qui est mesuré dans le plan de l'orbite, à partir de N. (voir figure 7.1).

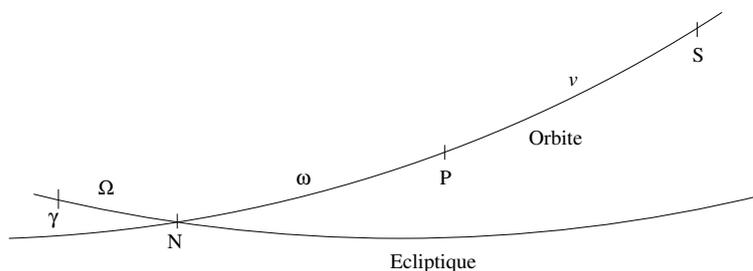


Figure 7.1: Le nœud ascendant de l'orbite

Les 6 éléments orbitaux utilisés par la suite sont L , a , e , i , Ω et ϖ :

1. L est la *longitude moyenne* de la planète définie par $L = \varpi + M$,
2. a est le *demi-grand axe* de l'ellipse.
3. e est l'*excentricité* de l'ellipse.

4. i l'inclinaison de l'orbite.
5. Ω est la *longitude du nœud ascendant* avec $\Omega = \angle(\vec{x}_\gamma, \vec{x}_N)$. C'est une longitude écliptique pure.
6. ϖ est la *longitude du périhélie* définie par $\varpi = \Omega + \omega$ où ω est l'*argument du périhélie*. En dehors du cas de la Terre, c'est une longitude bâtarde, mi-écliptique, mi-orbitale.

Remarque : La *longitude moyenne* repère la position d'un **astre fictif moyen**, dont le rayon vecteur tourne à vitesse constante autour du foyer dans le plan de la planète. Cet astre fictif coïncide deux fois par tour avec l'astre réel, au périhélie et à l'aphélie.

7.1.2 Position des planètes à un instant donné

Les éléments orbitaux ne donnent pas la position effective de la planète, car L n'est pas la longitude vraie mais moyenne. Pour calculer la position effective de la planète, on procède aux étapes suivantes :

- on situe le périhélie P au moyen de $\omega = \varpi - \Omega$,
- on calcule l'anomalie moyenne $M = L - \varpi$,
- on calcule l'anomalie excentrique E à l'instant considéré en résolvant l'équation de Kepler $M = E - e \sin E$,
- on calcule directement les coordonnées cartésiennes x et y par
$$\begin{cases} x = a(\cos E - e) \\ y = b \sin E \end{cases}$$
- ou bien, on calcule les coordonnées polaires r et v par $r = a(1 - e \cos E)$ et
$$\begin{cases} \cos v = \frac{\cos E - e}{1 - e \cos E} \\ \sin v = \frac{\sqrt{1 - e^2} \sin E}{1 - e \cos E} \end{cases} \quad \text{ou}$$

$$\tan \frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan \frac{E}{2},$$
- puis les coordonnées cartésiennes x et y par
$$\begin{cases} x = r \cos v \\ y = r \sin v \end{cases}$$

7.1.3 Tables de précision moyenne

Dans une approche moyennement précise les valeurs des 6 éléments orbitaux des planètes sont modélisées sous forme de polynômes :

$$p = a_0 + a_1 T + a_2 T^2 + a_3 T^3$$

- où les coefficients a_i sont fournis par des tables,
- et où T est le temps dynamique mesuré en siècles juliens par rapport à J2000.0 : $T = \frac{JD - 2451545.0}{36525}$.

Les coefficients a_i des polynômes qui permettent de calculer les positions de planète dans le référentiel équinoxe moyen de la date du calcul sont données dans la table 7.2.

Les coefficients a_i des polynômes qui permettent de calculer les positions de planète dans le référentiel équinoxe standard de J2000.0 sont données dans la table 7.4.

Dans la bibliothèque GNU Octave associée à ce document on trouvera la fonction `planetje2EclipHbis` qui utilise ces tables pour calculer la position des planètes.

7.1.4 Positions des planètes par la théorie VSOP87

Cette théorie due à Pierre Bretagnon et Gérard Francou du Bureau des Longitudes permet de calculer directement les 3 coordonnées polaires héliocentriques L, B et R des 8 planètes *dans le repère écliptique rapporté à l'équinoxe moyen de la date*. Notons τ la date dynamique du calcul exprimée en millénaires juliens écoulés depuis J2000. Si JD est la date courante exprimée en jour julien, on a :

$$\tau = \frac{JD - 2451545}{365250}$$

Chacune des 3 coordonnées L, B ou R est calculée par le même algorithme :

$$\begin{aligned} L &= (L_0 + L_1 \tau + L_2 \tau^2 + L_3 \tau^3 + L_4 \tau^4 + L_5 \tau^5) / 10^8 \\ B &= (B_0 + B_1 \tau + B_2 \tau^2 + B_3 \tau^3 + B_4 \tau^4 + B_5 \tau^5) / 10^8 \\ R &= (R_0 + R_1 \tau + R_2 \tau^2 + R_3 \tau^3 + R_4 \tau^4 + R_5 \tau^5) / 10^8 \end{aligned}$$

	a_0	a_1	a_2	a_3
Mercury				
L	252.250906	149474.0722491	0.00030350	0.000000018
a	0.387098310	0.	0.	
e	0.20563175	0.000020407	- 0.0000000283	- 0.0000000018
i	7.004986	0.0018215	- 0.00001810	0.000000056
Ω	48.330893	1.1861883	0.00017542	0.000000215
ϖ	77.456119	1.5564776	0.00029544	0.000000009
Vénus				
L	181.979801	58519.2130302	0.00031014	0.000000015
a	0.723329820	0.	0.	
e	0.00677192	- 0.000047765	0.0000000981	0.0000000046
i	3.394662	0.0010037	- 0.00000088	- 0.000000007
Ω	76.679920	0.9011206	0.00040618	- 0.000000093
ϖ	131.563703	1.4022288	- 0.00107618	- 0.000005678
Terre				
L	100.466457	36000.7698278	0.00030322	0.000000020
a	1.000001018	0.	0.	
e	0.01670863	- 0.000042037	- 0.0000001267	0.0000000014
i	0	0.	0.	0.
Ω	<i>indéfini</i>			
ϖ	102.937348	1.7195366	0.00045688	- 0.000000018
Mars				
L	355.433000	19141.6964471	0.00031052	0.000000016
a	1.523679342	0.	0.	
e	0.09340065	0.000090484	- 0.0000000806	- 0.0000000025
i	1.849726	- 0.0006011	0.00001276	- 0.000000007
Ω	49.588093	0.7720959	0.00001557	0.000002267
ϖ	336.060234	1.8410449	0.00013477	0.000000536

Table 7.2: Éléments orbitaux pour l'équinoxe moyen à la date

	a_0	a_1	a_2	a_3
Jupiter				
L	34.351519	3036.3027748	0.00022330	0.000000037
a	5.202603209	0.0000001913	0.	
e	0.04849793	0.000163225	- 0.0000004714	- 0.0000000201
i	1.303267	- 0.0054965	0.00000466	- 0.000000002
Ω	100.464407	1.0209774	0.00040315	0.000000404
ϖ	14.331207	1.6126352	0.00103042	- 0.000004464
Saturne				
L	50.077444	1223.5110686	0.00051908	- 0.000000030
a	9.554909192	- 0.0000021390	0.000000004	
e	0.05554814	- 0.0003446641	- 0.0000006436	0.0000000340
i	2.488879	- 0.0037362	- 0.00001519	0.000000087
Ω	113.665503	0.8770880	- 0.00012176	- 0.000002249
ϖ	93.057237	1.9637613	0.00083753	0.000004928
Uranus				
L	314.055005	429.8640561	0.00030390	0.000000026
a	19.218446062	- 0.0000000372	0.00000000098	
e	0.04638122	- 0.000027293	0.0000000789	0.0000000024
i	0.773197	0.0007744	0.00003749	- 0.000000092
Ω	74.005957	0.5211278	0.00133947	0.000018484
ϖ	173.005291	1.4863790	0.00021406	0.000000434
Neptune				
L	304.348665	219.8833092	0.00030882	0.000000018
a	30.110386869	- 0.0000001663	0.00000000069	
e	0.00945575	0.000006033	0.0	- 0.00000000005
i	1.769953	- 0.0093082	- 0.00000708	0.000000027
Ω	131.784057	1.1022039	0.00025952	- 0.000000637
ϖ	48.120276	1.4262957	0.00038434	0.000000020

Table 7.3: Éléments orbitaux pour l'équinoxe moyen à la date (suite)

	a_0	a_1	a_2	a_3
Mercury				
L	252.250906	149472.6746358	- 0.00000536	0.000000002
a	0.387098310	0.	0.	
e	0.20563175	0.000020407	- 0.0000000283	- 0.0000000018
i	7.004986	- 0.0059516	0.00000080	0.000000043
Ω	48.330893	- 0.1254227	- 0.00008833	- 0.000000200
ϖ	77.456119	0.1588643	- 0.00001342	- 0.000000007
Vénus				
L	181.979801	58517.8156760	0.00000165	- 0.000000002
a	0.723329820	0.	0.	
e	0.00677192	- 0.000047765	0.0000000981	0.0000000046
i	3.394662	- 0.0008568	- 0.00003244	0.000000009
Ω	76.679920	- 0.2780134	- 0.00014257	- 0.000000164
ϖ	131.563703	0.0048746	- 0.00138467	- 0.000005695
Terre				
L	100.466457	35999.3728565	- 0.00000568	- 0.000000001
a	1.000001018	0.	0.	
e	0.01670863	- 0.000042037	- 0.0000001267	0.0000000014
i	0	0.0130548	- 0.00000931	- 0.000000034
Ω	174.873176	- 0.2410908	0.00004262	0.000000001
ϖ	102.937348	0.3225654	0.00014799	- 0.000000039
Mars				
L	355.433000	19140.2993039	0.00000262	- 0.000000003
a	1.523679342	0.	0.	
e	0.09340065	0.000090484	- 0.0000000806	- 0.0000000025
i	1.849726	- 0.0081477	- 0.00002255	- 0.000000029
Ω	49.588093	- 0.2950250	- 0.00064048	- 0.000001964
ϖ	336.060234	0.4439016	- 0.00017313	0.000000518

Table 7.4: Éléments orbitaux pour l'équinoxe standard J2000.0

	a_0	a_1	a_2	a_3
Jupiter				
L	34.351519	3034.9056606	- 0.00008501	0.000000016
a	5.202603209	0.0000001913	0.	
e	0.04849793	0.000163225	- 0.0000004714	- 0.00000000201
i	1.303267	- 0.0019877	0.00003320	0.000000097
Ω	100.464407	0.1767232	0.00090700	- 0.000007272
ϖ	14.331207	0.2155209	0.00072211	- 0.000004485
Saturne				
L	50.077444	1222.1138488	0.00021004	- 0.000000046
a	9.554909192	- 0.0000021390	0.000000004	
e	0.05554814	- 0.0003446641	- 0.0000006436	0.00000000340
i	2.488879	0.0025514	- 0.00004906	0.000000017
Ω	113.665503	- 0.2566722	- 0.00018399	0.000000480
ϖ	93.057237	0.5665415	0.00052850	0.000004912
Uranus				
L	314.055005	428.4669983	- 0.00000486	0.000000006
a	19.218446062	- 0.0000000372	0.00000000098	
e	0.04638122	- 0.000027293	0.0000000789	0.00000000024
i	0.773197	- 0.0016869	0.00000349	0.000000016
Ω	74.005957	0.0741431	0.00040539	0.000000119
ϖ	173.005291	0.0893212	- 0.00009470	0.000000414
Neptune				
L	304.348665	218.4862002	0.00000059	- 0.000000002
a	30.110386869	- 0.0000001663	0.00000000069	
e	0.00945575	0.000006033	0.0	- 0.00000000005
i	1.769953	0.0002256	0.00000023	0.
Ω	131.784057	- 0.0061651	- 0.00000219	- 0.000000078
ϖ	48.120276	0.0291866	0.00007610	0.

Table 7.5: Éléments orbitaux pour l'équinoxe standard J2000.0 (suite)

Les éléments L_i , B_i et R_i sont obtenus par des séries de la forme :

$$L_i = \sum_{k=1}^N A_k \cos(B_k + C_k \tau)$$

Le nombre N de triplets (A_k, B_k, C_k) est différent pour chaque élément L_i , B_i et R_i . Ces éléments figurent dans des tables en annexe au paragraphe ???. Le résultat de $(B_k + C_k \tau)$ est en radians. Pour les L_i et B_i les A_k sont en radians $\times 10^8$ et pour les R_i ils sont en unités astronomiques $\times 10^8$.

Dans la bibliothèque GNU Octave associée à ce document on trouvera la fonction `planet_je2eclipHvsop` qui utilise ces tables pour calculer la position des planètes. Les angles sont exprimés en radians et les distances en unités astronomiques :

$$1 \text{ UA} = 149597870691 \text{ m}$$

7.1.5 Position approximative de Pluton

Les paramètres orbitaux du Pluton sont approximativement les suivants :

- inclinaison $i \simeq 17^\circ.1$,
- longitude du nœud ascendant $\Omega \simeq 110^\circ.4$,
- argument du périhélie $\omega \simeq 112^\circ.6$,
- excentricité de l'orbite $e \simeq 0.25$
- demi-grand axe de $a \simeq 39.4 \text{ UA}$ (ce qui fait que la distance au Soleil varie de 29.7 UA à 49.3 UA),
- mouvement moyen $n = 1^\circ.4531/an$ (la période de révolution est d'environ $360/1.4531 = 247.74$ ans)
- dernier passage au périhélie : $JD = 2447654.53$ (8 mai 1989 0h43mn12s) d'après le JPL (Jet Propulsion Laboratory), et $JD = 2447778.7168$ (9 septembre 1989 5h12mn11s) d'après l'IAU Minor planet Center. Cet écart est normal car la détermination d'un minimum (de même que celle d'un maximum) est toujours difficile et peu précise.

Nous donnons ci-après des formules qui permettent de calculer la position de Pluton avec une précision un peu meilleure que le pour cent pour les siècles proches de J2000 dans le repère écliptique moyen héliocentrique époque J2000. Ces formules sont des simplifications de celles qui figurent dans [5] où nous n'avons conservé que les termes les plus importants, en négligeant les influences de Jupiter et Saturne.

On calcule d'abord la longitude moyenne de Pluton (en degrés décimaux) par :

$$P = 238^\circ.96 + 144.96T$$

où T est le temps écoulé en siècle juliens depuis J2000.

On obtient ensuite les coordonnées écliptiques héliocentriques (l, b, r) par :

$$l = P + \sum_{k=1}^4 a_k \sin(kP) + b_k \cos(kP)$$

$$b = -3^\circ.91 + \sum_{k=1}^4 c_k \sin(kP) + d_k \cos(kP)$$

$$r = 40.72 + \sum_{k=1}^4 e_k \sin(kP) + f_k \cos(kP)$$

où les a_k, \dots, f_k ont les valeurs suivantes :

k	a_k	b_k	c_k	d_k	e_k	f_k
1	-19.8	19.85	-5.45	-14.98	6.69	6.90
2	0.90	-4.95	3.53	1.67	-1.18	-0.03
3	0.61	1.21	-1.05	0.33	0.16	-0.14
4	-0.34	-0.19	0.18	-0.29	0.00	0.05

Les valeurs de l, b, a_k, b_k, c_k, d_k sont exprimées en degrés décimaux et celles de r, e_k, f_k sont exprimées en unités astronomiques (U.A).

Si on compare avec les paramètres orbitaux précédents, on constate que le terme linéaire en T de P , à savoir 144.96 correspond à moins de 1% près à $100n = 145.31$. Par ailleurs, en se limitant au premier terme des sommes, on a :

$$\begin{aligned} b &\simeq -3.91 + 15.94 \sin(P - 110^\circ) \\ r &\simeq 40.72 + 9.61 \cos(P - 44.1) \end{aligned}$$

L'amplitude du premier terme sinusoïdal de b qui vaut environ 16° est effectivement proche de l'inclinaison $i = 17^\circ$ et les rayons extrêmes $r = 40.72 \pm 9.61$ UA sont effectivement proches des valeurs précédemment énoncées ($29.7 - 49.3$ UA).

7.2 Position du Soleil

La trajectoire du barycentre Terre-Lune dans le repère héliocentrique est symétrique de la trajectoire du Soleil dans le repère ayant pour origine le barycentre Terre-Lune. La masse de la Lune étant 81 fois plus petite que celle de la Terre, le barycentre Terre-Lune est situé à environ 4670 km du centre de la Terre, c'est-à-dire à l'intérieur du rayon terrestre. Vu du Soleil, l'écart entre le centre Terre et le barycentre Terre-Lune est de l'ordre de 3/1000 de degré. Si on se limite à une précision de l'ordre de 1/100 de degré, on peut donc calculer la position du Soleil par rapport à la Terre en prenant l'opposé de la position du barycentre Terre-Lune par rapport au Soleil. Le temps utilisé dans les formules est le temps des éphémérides $TE = TU + \Delta T$.

7.2.1 Années anomalistiques, sidérales et tropiques, passage au périhélie

La période de temps qui sépare deux passages consécutifs de la Terre au périhélie de son orbite s'appelle l'*année anomalistique*. On l'estime actuellement à :

$$\tau_{ano} = 365.25963586 \text{ jours}$$

La période de temps qui sépare deux passages consécutifs par le même point défini par un alignement stellaire s'appelle l'*année sidérale*¹. On l'estime actuellement à :

$$\tau_{sid} = 365.25636305 \text{ jours solaires moyens}$$

La période de temps qui sépare deux passages consécutifs au point γ (qui précessionne par rapport aux étoiles) s'appelle l'*année tropique*². On l'estime actuellement à :

$$\tau_{tro} = 365.2421904 \text{ jours solaires moyens (ou vrais!)}$$

7.2.2 Trajectoire du Soleil (ou du barycentre Terre-Lune)

Les formules ci-après fournissent la position du Soleil dans le repère écliptique moyen de la date considérée.

L'excentricité de l'orbite donnée par :

$$e = 0.016708617 - 0.000042037T - 0.0000001267T^2 \quad (7.1)$$

avec T en siècles juliens par rapport à J2000 : $T = \frac{JD-2451545.0}{36525}$ (code GNU-Octave fonction `eccentricity`).

L'inclinaison i de l'orbite étant nulle, il n'y a pas d'angles bâtards. L'ascension droite du nœud ascendant Ω et l'argument du périhélie ω ne sont pas définis. Par contre sont définies :

- $\varpi = \Omega + \omega$ qui est la longitude du périégée de l'orbite du Soleil (ajouter $\pm 180^\circ$ pour le périhélie de l'orbite du barycentre Terre-Lune).
- $l = \varpi + v$ qui est la longitude vraie du Soleil (ajouter $\pm 180^\circ$ pour la longitude écliptique du barycentre Terre-Lune dans le repère écliptique héliocentrique, les anomalies vraies v étant les mêmes).

¹Ce terme peut prêter à confusion, et cette année devrait être appelée année stellaire car on fait la distinction entre le jour stellaire (durée entre 2 passages successifs d'une étoile par le méridien) et le jour sidéral (durée entre 2 passages successifs de la direction du point γ par le méridien), différence qui provient de la précession du point γ .

²L'intervalle de temps entre deux passages successifs au point γ est l'année tropique vraie vernale. A cause de la variation de vitesse du parcours de la trajectoire de la Terre autour du Soleil (2ème loi de Kepler) cette durée est différente de l'année tropique vraie entre deux équinoxes d'automne, ou deux solstices d'été ou deux solstices d'hiver. La valeur couramment utilisée est une valeur *moyenne* indépendante des saisons, appelée année tropique moyenne. Cette durée diminue de 5 à 10s par millénaires (0.6 à $1.2 \cdot 10^{-7}$ jour par an)

- $F = \varpi + E$ qui est appelé la longitude excentrique du Soleil (ajouter $\pm 180^\circ$ pour celle du barycentre Terre-Lune, les anomalies excentriques E étant les mêmes).
- $L = \varpi + M$ qui est appelé la longitude moyenne du Soleil (ajouter $\pm 180^\circ$ pour celle du barycentre Terre-Lune, les anomalies moyennes M étant les mêmes). C'est la longitude éclipique d'un *Soleil moyen éclipique* qualifié ainsi pour le différencier du soleil moyen équatorial défini en 2.2.1.

La longitude du périégée de l'orbite du Soleil est donnée par :

$$\varpi = 282^\circ.937357 + 1^\circ.71953T + 0^\circ.0004569T^2$$

(code GNU-Octave `earth_longiPerih_dg`). Il suffit d'ajouter $\pm 180^\circ$ pour obtenir le périhélie de l'orbite du barycentre Terre-Lune.

L'anomalie moyenne du Soleil est donnée par :

$$M = 357^\circ.52910 + 35999^\circ.05030T - 0^\circ.0001537T^2 \quad (7.2)$$

(c'est également celle du barycentre Terre-Lune).

Remarques périphériques :

- A 10^{-8} près, on retrouve dans l'expression de M la vitesse de révolution qui correspond à une année anomalistique : $\left(\frac{dM}{dt}\right)_{T=0} \simeq 36525 \frac{360}{\tau_{ano}} = 35999.0503$. Ainsi, le mouvement moyen du barycentre Terre-Lune sur son orbite est donné par $n_{ano} = \frac{360}{\tau_{ano}} = 0.985600282^\circ/\text{j}$
- L'anomalie moyenne à $t_{J0} = \text{J2000}$ vaut $M_{T=0} = 357^\circ.52910 \equiv -2^\circ.4709$. Le passage suivant au périhélie à lieu pour :

$$\begin{aligned} 0 &\simeq -2^\circ.4709 + 35999^\circ.05030T \implies T = 6,863792181 \cdot 10^{-5} \\ &\implies JD = 2.507 + 2451545.0 \end{aligned}$$

ce qui correspond au 4 janvier à 2000 à 0h10mn05s TE, c'est-à-dire au 4 janvier à 2000 à 0h11mn09s UT à environ 4 minutes de la date fournie par les catalogues qui est le 4 janvier 2000 à 0h15mn24s UT).

La différence entre l'anomalie vraie et l'anomalie moyenne est appelée **équation du centre**. Elle est notée :

$$C = v - M$$

Elle est théoriquement obtenue en résolvant l'équation de Kepler qui fournit l'anomalie excentrique E en fonction de M qui permet ensuite de calculer ν .

Dans une approche simplifiée, on peut utiliser la formule approchée suivante :

$$C = \left(2e - \frac{1}{4}e^3\right) \sin M + \left(\frac{5}{4}e^2 - \frac{11}{24}e^4\right) \sin 2M + \frac{13}{12}e^3 \sin 3M + \frac{103}{96}e^4 \sin 4M$$

ou encore en utilisant la partie constante e_0 de e :

$$\begin{aligned} C &= (1^\circ.914600 - 0^\circ.004817T - 0^\circ.000014T^2) \sin M \\ &+ (0^\circ.019993 - 0^\circ.000101T) \sin 2M + 0^\circ.000290 \sin 3M \end{aligned} \quad (7.3)$$

L'anomalie vraie du barycentre Terre-Lune ou du Soleil est ensuite obtenue par :

$$v = M + C$$

Avec l'excentricité de l'orbite donnée par 7.1, on calcule la distance Terre-Soleil :0

$$R = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos v}$$

où :

$$\begin{aligned} a &= 1.000001018\text{UA} \\ \text{UA} &= 149597870691\text{m} \end{aligned}$$

On définit un soleil éclipse moyen qui parcourt l'éclipse à vitesse constante et passe par le point vernal moyen en même temps que le soleil vrai. La longitude L de ce Soleil éclipse moyen, angle entre l'équinoxe moyen de la date et ce Soleil éclipse moyen, est donnée par :

$$L = 280.466457 + 36000.76983T - 0.0003032T^2 \quad (7.4)$$

On remarquera que comme il balaye 360° entre deux passages consécutifs par l'équinoxe moyen de la date, ce qui définit la durée d'une année tropique, le facteur de T est donné par cette période : $360^\circ \times \frac{36525}{365.2421904} = 36000.7698^\circ$.

Comme l'équation au centre C est la différence angulaire entre le Soleil vrai et le Soleil éclipse moyen, il est plus simple de calculer la **longitude du Soleil vrai** par :

$$\lambda_{\odot} = L + C$$

En ajoutant 180° on obtient la longitude du barycentre Terre-Lune dans le repère héliocentrique éclipse moyen de la date considérée.

Dans la bibliothèque GNU Octave associée à ce document on trouvera la fonction `sun_longi_dg` qui calcule λ_{\odot} et v .

Remarque : A $t_{J0} = J2000$, on a :

$$\left. \begin{array}{l} M_{J0} = 357.52910 \\ L_{J0} = 280.46646 \end{array} \right\} \Rightarrow \varpi_{J0} = -77.06264 = 282.93736$$

7.2.3 Coordonnées éclipse du Soleil (ou du barycentre Terre-Lune)

Pour obtenir la **longitude apparente du Soleil vrai** il faut corriger cette valeur de la nutation et de l'aberration. La correction de nutation est obtenue en ajoutant $\Delta_n\psi$ donné par 3.21 qui plus grossièrement peut être pris égal à ;

$$\Delta_n\psi = -0.00478 \sin(125^\circ 04' - 1934^\circ 136T)$$

La correction d'aberration $\Delta_a\psi$ pour le Soleil est approximativement égale à -0.00569 . En effet, quand on voit le Soleil, il s'est écoulé un intervalle de temps $\Delta t = UA/c$ pendant lequel le Soleil s'est déplacé en longitude d'un angle approximativement égal à :

$$\Delta_a\psi \simeq \frac{360^\circ}{365.25} \times \frac{149600000}{300000 \times 86400} = 0.00569$$

qu'il faut retrancher pour positionner le Soleil à l'endroit où il était quand sa lumière nous est parvenue.

Il en résulte la longitude apparente suivante pour le Soleil vrai :

$$\lambda'_{\odot} = \lambda_{\odot} + \Delta_n\psi - \Delta_a\psi \quad (7.5)$$

Dans la bibliothèque GNU Octave associée à ce document on trouvera la fonction `sun_je2equa` qui calcule les coordonnées équatoriales apparentes du Soleil.

Les coordonnées cartésiennes du Soleil dans le repère éclipse géocentrique sont :

$$\begin{cases} x = R \cos \lambda_{\odot} \\ y = R \sin \lambda_{\odot} \end{cases}$$

On peut également utiliser l'approche par la résolution de l'équation de Kepler : $M = E - e \sin E$ qui fournit E à partir de M

Puis calculer les coordonnées cartésiennes par :

$$\begin{aligned} x &= a(\cos E - e) \\ y &= b \sin E \end{aligned}$$

et calculer v par :

$$v = \text{atan2}(y, x)$$

7.2.4 Coordonnées équatoriales du Soleil

Les coordonnées cartésiennes dans le repère équatorial sont obtenues en prenant en compte l'obliquité $\bar{\epsilon}$ à la date t est calculée au moyen de la relation (3.6)

$$(T_{\odot})_C = \begin{pmatrix} x_{\odot} \\ y_{\odot} \\ z_{\odot} \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} \cos \lambda_{\odot} \\ \sin \lambda_{\odot} \cos \bar{\epsilon} \\ \sin \lambda_{\odot} \sin \bar{\epsilon} \end{pmatrix} \quad (7.6)$$

Dans une version simplifiée l'obliquité $\bar{\varepsilon}$ peut-être prise égale à la partie constante de $\bar{\varepsilon}$ dans 3.6. Dans une version plus précise, si on corrige λ_{\odot} de la nutation $\Delta_n \psi$ (et éventuellement de l'aberration), il faut corriger $\bar{\varepsilon}$ de $\Delta \varepsilon$ donné par 3.22.

Pour obtenir les coordonnées équatoriales $(\alpha_{\odot}, \delta_{\odot})$ du Soleil, on écrit que :

$$(T_{\odot})_C = R \begin{pmatrix} \cos \alpha_{\odot} \cos \delta_{\odot} \\ \sin \alpha_{\odot} \cos \delta_{\odot} \\ \sin \delta_{\odot} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{\odot} \\ y_{\odot} \\ z_{\odot} \end{pmatrix} \quad (7.7)$$

D'où :

$$\begin{aligned} \alpha_{\odot} &= \text{atan2}(y_{\odot}, x_{\odot}) = \text{atan2}(\sin \lambda_{\odot} \cos \bar{\varepsilon}, \cos \lambda_{\odot}) \\ \delta_{\odot} &= \arcsin\left(\frac{z_{\odot}}{r}\right) = \arcsin(\sin \lambda_{\odot} \sin \bar{\varepsilon}) \end{aligned} \quad (7.8)$$

7.3 La lune

Les éléments de l'orbite de la Lune a peu près constant sont les suivants :

- demi-grand axe $a = 384748\text{km}$
- excentricité moyenne $e = 0.055$ (elle varie entre 0.026 et 0.077)
- inclinaison moyenne sur l'écliptique $i = 5^{\circ}.14$ (elle varie entre 5° et $5^{\circ}28$).

Les autres éléments varient fortement avec le temps. Ainsi la ligne des nœuds (longitude du nœud ascendant Ω) fait un tour complet en 18.6 ans dans le sens rétrograde, et la ligne des apsides (argument du périégée ω) fait un tour complet en 8.85 ans dans le sens direct.

L'axe de rotation de la Lune est incliné de $1^{\circ}.54$ par rapport à l'écliptique (en sens inverse de l'inclinaison de l'orbite), et de $6^{\circ}68$ par rapport à l'orbite.

La Lune fait une révolution complète de son orbite en 27.32 jours. C'est le *mois sidéral* (M_{sid}). Mais on considère aussi :

- le mois synodique (M_{syno}) d'environ 29.53 jours, période entre deux phases lunaires identiques (configurations Terre-Lune-Soleil identiques),
- le mois tropique quasiment égal au mois sidéral est la période entre deux passages à la même longitude écliptique (différence très faible due à la précession des équinoxes),
- le mois anomalistique d'environ 27.55 jours (période de retour au périégée),
- le mois draconique d'environ 27.21 jours (période de retour au nœud ascendant).

Remarque : En première approximation $M_{syno} \simeq M_{sid} + \Delta t$ avec $\Delta t = \frac{\left(\frac{360}{365.2423} M_{syno}\right)}{\frac{360}{M_{sid}}}$ soit $M_{syno} \simeq M_{sid} + \frac{M_{sid} M_{syno}}{365.2423}$, d'où :

$$M_{sid} \simeq \frac{365.2423 M_{syno}}{365.2423 + M_{syno}}$$

et

$$M_{syno} \simeq \frac{365.2423 M_{sid}}{365.2423 - M_{sid}}$$

La période de rotation propre de la Lune (sur elle-même) est synchrone de sa période de révolution, ce qui fait qu'elle présente, en moyenne, toujours le même coté à la Terre (avec de petites différences du fait des différences de vitesses entre périégée, apogée, ...). Plus précisément sa période de rotation stellaire est exactement égale à sa période de révolution stellaire.

7.3.1 Position de la Lune

La méthode exposée est une méthode de précision moyenne issue de la théorie lunaire ELP 2000 de M. Chapront-Touzé, J. Chapront et G. Francou, diffusée par les ouvrages de Jean Meeus [5, 4]. Elle fournit la longitude géocentrique de la Lune avec un précision de $10''$ et la latitude géocentrique avec une précision de $4''$, rapportées à l'équinoxe moyen de la date considérée.

Le temps utilisé dans les formules est le temps des éphémérides $TE = TU + \Delta T$.

Dans une première étape, on calcule les 4 angles suivants, *en degrés*, en fonction du temps des éphémérides T exprimé en siècles Julien écoulés depuis J2000 :

Élongation moyenne de la Lune (angle des directions Terre-Lune et Terre-Soleil) :

$$D = 297.8501921 + 445267.1114034T - 0.0018819T^2 + \frac{T^3}{545868} - \frac{T^4}{113065000}$$

Anomalie moyenne de la Lune :

$$M_l = 134.9633964 + 477198.8675055T + 0.0087414T^2 + \frac{T^3}{69699} - \frac{T^4}{14712000}$$

Anomalie Moyenne du Soleil :

$$M = 357.5291092 + 35999.0502909T - 0.0001536T^2 + \frac{T^3}{24490000}$$

Argument de latitude de la Lune :

$$F = 93.272095 + 483202.0175233T - 0.0036539T^2 - \frac{T^3}{3526000} + \frac{T^4}{863310000}$$

En fonction de ces 4 angles, on calcule ensuite 3 sommes correctives S_L , S_B et S_R données par des expressions de la forme :

$$\begin{aligned} S_L &= \sum_{k=1}^{60} l_k e_k \sin(d_k D + m_k M + n_k M_l + f_k F) \\ S_R &= \sum_{k=1}^{60} r_k e_k \cos(d_k D + m_k M + n_k M_l + f_k F) \\ S_B &= \sum_{k=1}^{60} r_k e_k \sin\left(d'_k D + m'_k M + n'_k M_l + f'_k F\right) \end{aligned}$$

On remarquera que les sommes S_R et S_B ont les mêmes arguments pour leur sinus et cosinus qui dépendent des coefficients d_k, m_k, n_k et f_k . Les sinus de la somme S_B dépendent des coefficients d'_k, m'_k, n'_k et f'_k . Les coefficients d_k ne prennent que les valeurs 0, 1, 2, 3 ou 4. Les coefficients m_k ne prennent que les valeurs 0, 1, -1, 2 ou -2. Les coefficients n_k ne prennent que les valeurs 0, 1, -1, 2, -2, 3 ou -3. Les coefficients f_k ne prennent que les valeurs 0, 2 ou -2. Les coefficients d'_k ne prennent que les valeurs 0, 1, 2 ou 4. Les coefficients m'_k ne prennent que les valeurs 0, 1, -1 ou -2. Les coefficients n'_k ne prennent que les valeurs 0, 1, -1, 2, -2, 3 ou -3. Les coefficients f'_k ne prennent que les valeurs 1, -1, 3 ou -3. Ces coefficients sont donnés dans le code Octave qui figure en annexe.

Les termes multiplicatifs e_k dépendent de l'anomalie moyenne du Soleil M par l'intermédiaire de la valeur E suivante :

$$E = 1 - 0.002516T - 0.0000074T^2$$

On a $e_k = 1$ lorsque m_k ou m'_k valent 0, $e_k = E$ lorsque m_k ou m'_k valent 1 ou -1 et $e_k = E^2$ lorsque m_k ou m'_k valent 2 ou -2.

La distance Terre Lune, en mètre, est finalement donnée par :

$$\rho_L = 385000560 + S_R$$

La longitude et la latitude écliptique géocentriques de la Lune dans le repère équinoxe de la date sont données par :

$$\begin{aligned} \lambda_L &= L + S_L \\ \beta_L &= S_B \end{aligned}$$

ou L est la longitude écliptique moyenne de la Lune préalablement calculée par :

$$L = 218.3164477 + 481267.88123421T - 0.0015786T^2 + \frac{T^3}{538841} - \frac{T^4}{65194000}$$

Remarque : Faire attention aux unités des expressions de S_L , S_B et S_R .

Dans la bibliothèque GNU Octave associée à ce document on trouvera les fonctions `moon_je2ecli` et `moon_je2equa` qui mettent en oeuvre cet algorithme.

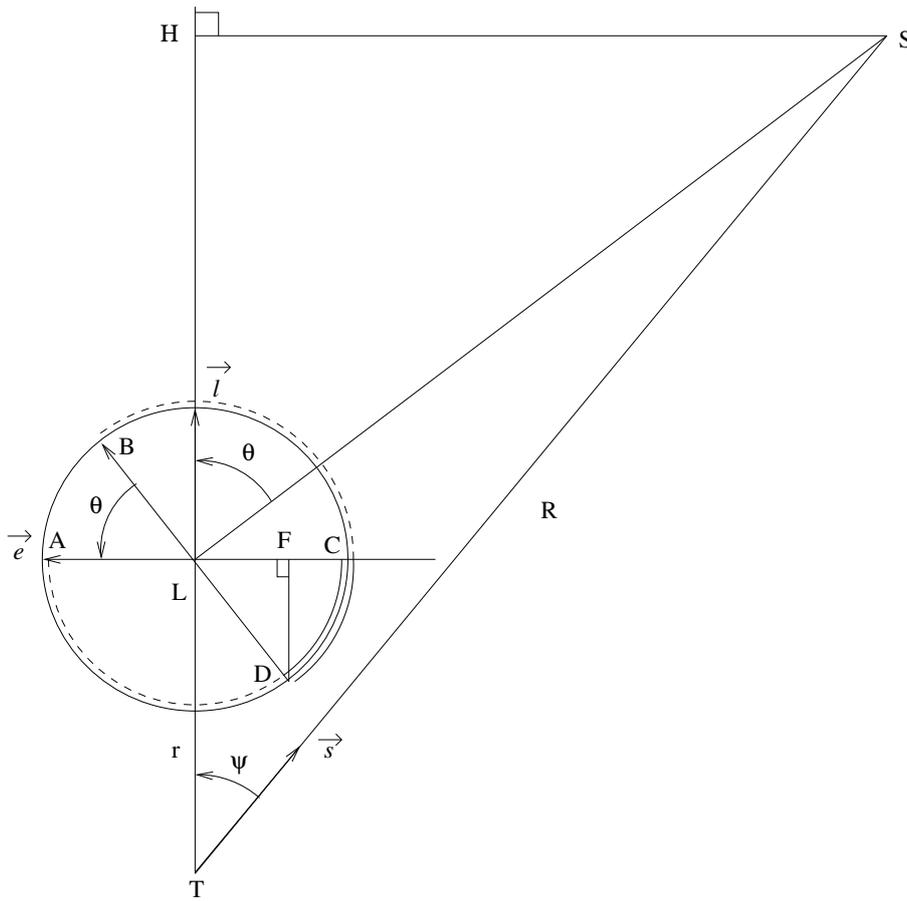


Figure 7.2: Plan du triangle Terre - Lune Soleil

7.3.2 Phases et angle Parallactique de la Lune

7.3.2.1 Élongation de la Lune par rapport au Soleil

La figure 7.2 présente le plan passant par les centres de la Terre, de la Lune et du Soleil, vu du côté du pôle céleste boréal. Autrement dit, on suppose que le pôle Nord terrestre est au-dessus de la figure et le pôle Sud en-dessous. Sur cette figure, on considère que le sens positif de rotation est le sens trigonométrique positif autour du vecteur unitaire \vec{p} normal à la feuille, dirigé du côté du pôle boréal.

Comme la Lune et le Soleil, dans leur mouvement de révolution relatif autour de la Terre, tournent également dans le sens trigonométrique positif, et que la Lune tourne environ 12 fois plus vite que le Soleil, la situation de la figure correspond à environ 4 jours après la nouvelle Lune.

Sur cette figure nous avons tracé :

- le vecteur unitaire $\vec{l} = \frac{\vec{TL}}{\|\vec{TL}\|}$ du segment Terre - Lune, avec $R = \|\vec{TS}\|$.
- le vecteur unitaire $\vec{s} = \frac{\vec{TL}}{\|\vec{TL}\|}$ du segment Terre - Soleil, avec $r = \|\vec{TL}\|$
- l'angle $\psi = \angle(\vec{s}, \vec{l})$ est l'**élongation** de la Lune par rapport au Soleil. Il est positif dans la situation dessinée.

Considérons le vecteur unitaire orthogonal au plan TLS :

$$\vec{p} = \pm \frac{\vec{s} \wedge \vec{l}}{\|\vec{s} \wedge \vec{l}\|}$$

où on choisira le signe + ou - de telle manière que \vec{p} soit dirigé du côté du pôle boréal (produit scalaire positif avec la direction du pôle boréal par exemple). On a alors :

$$\vec{s} \wedge \vec{l} = \vec{p} \sin \psi$$

D'où :

$$\begin{aligned}\cos \psi &= (\vec{s} \cdot \vec{l}) \\ \sin \psi &= \left((\vec{s} \wedge \vec{l}) \cdot \vec{p} \right) \\ \psi &= \arctan 2 (\sin \psi, \cos \psi)\end{aligned}$$

Notons (α_0, δ_0) et (α, δ) les coordonnées équatoriales de la Lune et du Soleil. Dans un repère équatorial dont le méridien origine contient la Lune (tourné d'un angle α pour simplifier les expressions), les composantes des différents vecteurs s'écrivent :

$$\begin{aligned}\vec{l} &= \begin{pmatrix} \cos \delta \\ 0 \\ \sin \delta \end{pmatrix}, \quad \vec{s} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha_0 - \alpha) \cos \delta_0 \\ \sin(\alpha_0 - \alpha) \cos \delta_0 \\ \sin \delta_0 \end{pmatrix} \\ \vec{p} \sin \psi &= \begin{pmatrix} \sin(\alpha_0 - \alpha) \cos \delta_0 \sin \delta \\ \sin \delta_0 \cos \delta - \cos(\alpha_0 - \alpha) \cos \delta_0 \sin \delta \\ -\sin(\alpha_0 - \alpha) \cos \delta_0 \cos \delta \end{pmatrix} \\ \cos \psi &= \cos(\alpha_0 - \alpha) \cos \delta_0 \cos \delta + \sin \delta_0 \sin \delta\end{aligned}$$

Remarque : Si la Lune et le Soleil sont au voisinage du plan équatorial, on a alors $\vec{p} \sin \psi \simeq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\sin(\alpha_0 - \alpha) \end{pmatrix}$

et $\cos \psi \simeq \cos(\alpha_0 - \alpha)$, d'où $\psi \simeq \alpha - \alpha_0$. Avant la nouvelle Lune, ψ est négatif, il est nul à la nouvelle Lune et il est positif après.

7.3.2.2 Phases de la Lune

Sur la figure 7.2, l'arc vu de la Terre est l'arc \widehat{AC} (coté Terre). L'arc éclairé par le Soleil est l'arc \widehat{BD} (coté Soleil) et l'arc éclairé, vu de la Terre est l'arc $\widehat{DC} = \widehat{AC} \cap \widehat{BD}$. L'**angle de phase de la Lune**, noté θ , est l'angle au centre de cet arc. Comme angle à cotés opposés par le sommet c'est également l'angle $\angle(\vec{LB}, \vec{LA})$ et comme angle à cotés perpendiculaires c'est également l'angle $\angle(\vec{LS}, \vec{TL})$:

$$\theta = \angle(\vec{LS}, \vec{TL})$$

En notant $D = \|LS\|$ la distance Lune - Soleil, on a dans le triangle rectangle LSH :

$$\begin{aligned}\|LH\| &= D \cos \theta = R \cos \psi - r \\ \|HS\| &= D \sin \theta = R \sin \psi\end{aligned}$$

d'où :

$$\tan \theta = \frac{\sin \psi}{\cos \psi - \frac{r}{R}}$$

Si on considère que $R \gg r$, alors $\theta \simeq \psi$ ce qui est évident sur la figure. En **très, très grosse approximation**, on a :

$$\theta \simeq \psi \simeq \alpha - \alpha_0$$

La figure présente les différents aspects de la Lune en fonction de l'angle θ . A la nouvelle lune, $\theta = 0$, puis θ augmente, le croissant se formant à droite, atteignant la demi lune au bout de 7 jours, puis la pleine lune au bout de 14 à 15 jours, puis il décroît sur la droite pour atteindre la demi lune à gauche au bout d'environ 22 jours pour diminuer jusqu'à la nouvelle lune 29 à 30 jours plus tard.

7.3.2.3 Angle parallactique

Pour dessiner correctement le croissant de Lune, il faut connaître l'angle d'inclinaison i de ce croissant par rapport à la verticale de l'observateur. La figure 7.4 représente le cercle de la Lune vu de la Terre, avec le vecteur unitaire \vec{z} vu vertical par l'observateur. Les deux cornes du croissant de Lune sont sur l'axe de vecteur unitaire \vec{p} perpendiculaire au plan Terre-Lune-Soleil. L'inclinaison du croissant est l'angle de ces deux vecteurs. Sur cette figure, nous avons fait figurer :

- le vecteur unitaire \vec{n} tangent au méridien passant par la Lune, c'est-à-dire tangent au grand cercle de la sphère céleste qui passe par la Lune et par les pôles célestes, dirigé du coté du pôle boréal,

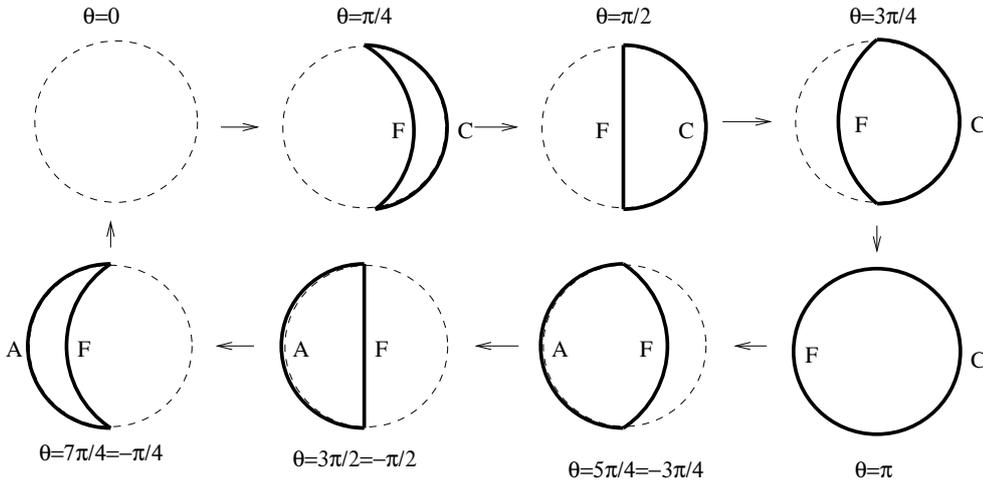


Figure 7.3: Les phases de la Lune

- le vecteur unitaire \vec{z} tangent au grand cercle de la sphère céleste qui passe par la Lune et par le zénith de l'observateur, dirigé du côté de ce zénith,
- l'angle parallactique $\sigma = \angle(\vec{n}, \vec{z})$ qui est l'angle entre ces deux vecteurs,
- l'angle d'inclinaison $\eta = \angle(\vec{n}, \vec{p})$ du croissant de Lune par rapport au méridien contenant la Lune,
- l'angle $\gamma = \eta + \frac{\pi}{2} = \angle(\vec{n}, \vec{e})$, entre le grand cercle méridien contenant la Lune et le grand cercle du plan Terre - Lune - Soleil. Le vecteur \vec{e} et les points A, B, D et C sont également représentés sur la figure 7.2.

La figure 7.5 représente la même scène vue de l'espace. On remarquera que se trouvant de l'autre côté du plan de la figure 7.4, la droite devient la gauche et les angles dans le plan de cette figure sont ici positifs dans ce qui semble être le sens rétrograde (c'est-à-dire le sens horaire).

Calculons l'angle parallactique $\sigma = \angle(\vec{n}, \vec{z})$ à l'aide des composantes des différents vecteurs dans le repère équatorial dont le méridien origine contient la Lune. Les cosinus directeurs de la verticale de l'observateur sont :

$$\vec{k} = \begin{pmatrix} \cos H \cos \varphi_A \\ \sin H \cos \varphi_A \\ \sin \varphi_A \end{pmatrix}$$

où H est l'angle horaire de la Lune et φ_A la latitude de l'observateur. Le vecteur \vec{z} est orthogonal à \vec{l} et contenu dans le plan TLZ. Notons \vec{h} le vecteur normal à ce plan défini par :

$$\vec{h} = \vec{k} \wedge \vec{l} = \begin{pmatrix} \sin H \cos \varphi_A \sin \delta \\ \sin \varphi_A \cos \delta - \cos H \cos \varphi_A \sin \delta \\ -\sin H \cos \varphi_A \cos \delta \end{pmatrix}$$

Ce vecteur est dans le plan de la figure 7.4, normal à \vec{z} . Il apparaît qu'il est inutile de calculer les composantes de \vec{z} car $\sigma = \angle(\vec{g}, \vec{h})$ comme angle à côtés perpendiculaires. On connaît \vec{h} et \vec{g} la tangente au parallèle en L d'où $\vec{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Il en résulte les relations suivantes :

$$(\vec{g} \cdot \vec{h}) = \rho \cos \sigma = \sin \varphi_A \cos \delta - \cos H \cos \varphi_A \sin \delta$$

et :

$$\vec{g} \wedge \vec{h} = -\rho \vec{l} \sin \sigma = \begin{pmatrix} -\sin H \cos \varphi_A \cos \delta \\ 0 \\ -\sin H \cos \varphi_A \sin \delta \end{pmatrix} \Rightarrow \rho \sin \sigma = \sin H \cos \varphi_A$$

car le sens trigonométrique positif pour l'observateur se fait autour de $-\vec{l}$. Il en résulte :

$$\sigma = \arctan 2(\sin H \cos \varphi_A, \sin \varphi_A \cos \delta - \cos H \cos \varphi_A \sin \delta)$$

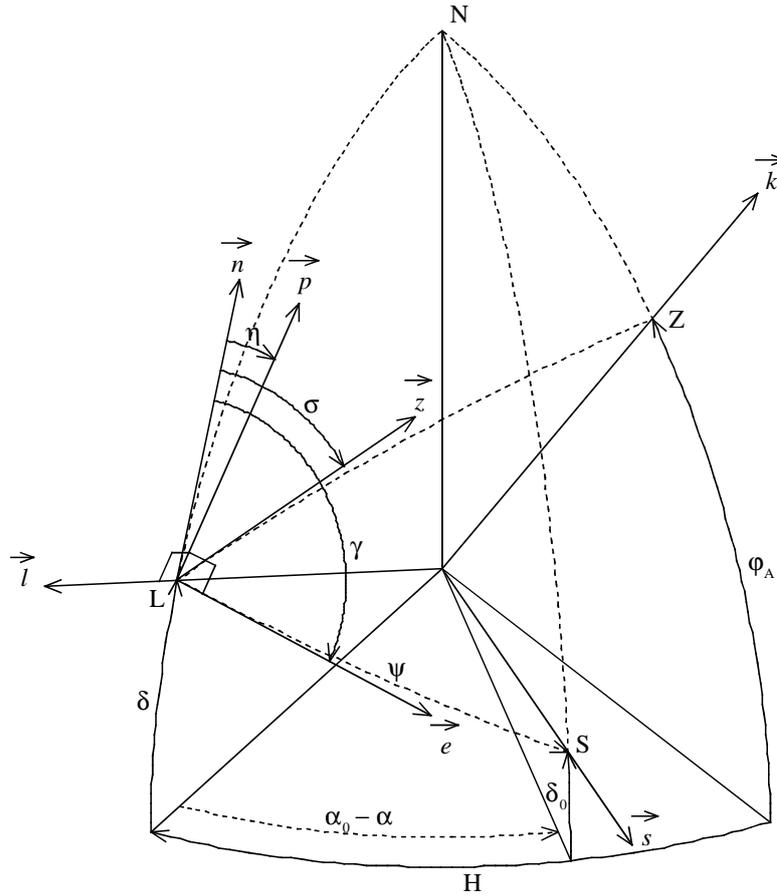


Figure 7.5: Portion de sphère céleste avec la Lune et le Soleil

Notons \mathcal{B}_M la base liée à l'astre et associée à son méridien origine, avec son axe \vec{z} dirigé vers le pôle nord de rotation de l'astre et son axe \vec{x} sortant par le méridien origine. Le passage de la base équatoriale \mathcal{B}_C à la base \mathcal{B}_M se fait par les trois rotations successives suivantes :

- $R_z(\alpha_q)$ transforme \mathcal{B}_C amenant $\vec{O}\vec{\gamma}$ selon $\vec{O}\vec{Q}$
- $R_x\left(\frac{\pi}{2} - \delta_N\right)$ autour de $\vec{O}\vec{Q}$ amène \vec{z}_C selon \vec{z}_M
- $R_z(W)$ autour \vec{z}_M de transforme le méridien contenant Q en méridien origine.

Ainsi, **avec notre convention**³, la matrice de passage R_{CM} s'écrit :

$$R_{CM} = R_z\left(\alpha_N + \frac{\pi}{2}\right) R_x\left(\frac{\pi}{2} - \delta_N\right) R_z(W)$$

Nous donnons ci-après des expressions qui permettent de calculer les angles α_N , δ_N et W (en degrés décimaux) en fonction du temps des éphémérides T , exprimé en siècles juliens écoulés depuis J2000, du temps des éphémérides d , exprimé en jours écoulés depuis J2000 et d'angles intermédiaires :

$$E_k = a_k + b_k d$$

Dans le cas de la Lune le tableau 7.6 fournit les coefficients a_k et b_k qui permettent de calculer 13 angles intermédiaires E_k .

Ces angles E_k sont à convertir en radians pour les utiliser les expressions des coordonnées équatoriales du pôle,

³Voir la définition de cette convention au paragraphe 3.1.

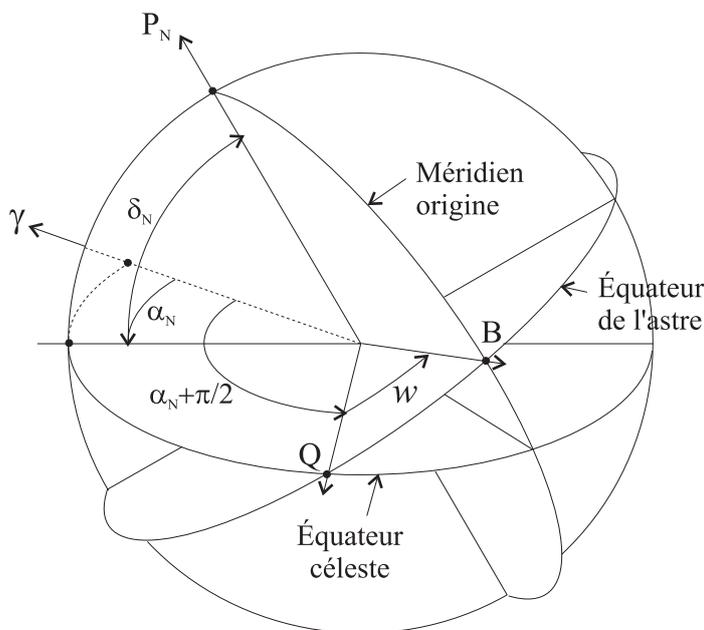


Figure 7.6: Définition des éléments d'orientation de l'astre

k	a_k	b_k	k	a_k	b_k
1	125.045	-0.0529921	8	276.617	0.328*7146
2	250.089	-0.1059842	9	34.226	1.7484877
3	260.008	13.0120009	10	15.134	-0.1589763
4	176.625	13.3407154	11	119.743	0.0036096
5	357.529	0.9856003	12	239.961	0.1643573
6	311.589	26.4057084	13	25.053	12.9590088
7	134.963	13.0649930			

Table 7.6: Coefficients des 13 angles E_k

qui dans le cas de la Lune sont données (en degrés) par :

$$\begin{aligned} \alpha_N &= 269.9949 + 0.0031T - 3.8787 \sin(E_1) - 0.1204 \sin(E_2) + 0.0700 \sin(E_3) \\ &\quad - 0.0172 \sin(E_4) + 0.0072 \sin(E_6) - 0.0052 \sin(E_{10}) + 0.0043 \sin(E_{13}) \\ \delta_N &= 66.5392 + 0.0130T + 1.5419 \cos(E_1) + 0.0239 \cos(E_2) - 0.0278 \cos(E_3) \\ &\quad + 0.0068 \cos(E_4) - 0.0029 \cos(E_6) + 0.0009 \cos(E_7) + 0.0008 \cos(E_{10}) \\ &\quad - 0.0009 \cos(E_{13}) \end{aligned}$$

L'argument du méridien origine W est donné (en degrés) par :

$$\begin{aligned} W &= 38.3213 + 13.17635815d - 1.4 \times 10^{-12}d^2 + 3.5610 \sin(E_1) + 0.1208 \sin(E_2) \\ &\quad - 0.0642 \sin(E_3) + 0.0158 \sin(E_4) + 0.0252 \sin(E_5) - 0.0066 \sin(E_6) \\ &\quad - 0.0047 \sin(E_7) - 0.0046 \sin(E_8) + 0.0028 \sin(E_9) + 0.0052 \sin(E_{10}) \\ &\quad + 0.0040 \sin(E_{11}) + 0.0019 \sin(E_{12}) - 0.0044 \sin(E_{13}) \end{aligned}$$

7.4 Correction aberration et effet temps-lumière

Lorsqu'on observe une étoile, la position observée est celle qu'elle occupait lorsqu'elle a émis la lumière qui nous est parvenue. Dans le cas d'une planète, c'est la même chose et si d est la distance entre la Terre et la planète à l'instant de son observation, on la voit à l'instant t à la position qu'elle occupait à l'instant $t - d/c$. C'est l'effet temps-lumière. Par ailleurs, les rayons qui parviennent à la Terre depuis cette position subissent l'aberration liée à la vitesse de la Terre, que l'on peut calculer en utilisant les formules du paragraphe 4.2. Cette aberration étant liée au déplacement de la Terre, on peut également la calculer en considérant les coordonnées de la planète à la position qu'elle occupait à l'instant $t - d/c$ depuis la position occupée par la Terre, également à l'instant $t - d/c$. Ainsi, la fonction GNU-Octave `planet2equa` utilise les 2 méthodes suivantes pour effectuer ces corrections :

1. La méthode séparée : Calcul des coordonnées cartésiennes héliocentriques de la Terre T et de la planète P à l'instant t : $OT(t)$ et $OP(t)$. Calcul de la distance $d = \|OP - OT\|$. Puis calcul de la position occupée par la planète à l'instant $t - d/c$: $OP(t - d/c)$. Calcul ensuite des coordonnées cartésiennes géocentriques de cette position : $TP = OP(t - d/c) - OT(t)$, puis des coordonnées angulaires associées et application des formules sur l'aberration du paragraphe 4.2.
2. La méthode combinée : Calcul des positions cartésiennes héliocentriques de la Terre T et de la planète P à l'instant t : $OT(t)$ et $OP(t)$. Calcul de la distance $d = \|OP - OT\|$. Puis calcul des coordonnées cartésiennes héliocentriques des positions occupées par la Terre T et la planète P à l'instant $t - d/c$: $OT(t - d/c)$ et $OP(t - d/c)$. Calcul ensuite des coordonnées cartésiennes géocentriques de cette position : $TP = OP(t - d/c) - OT(t - d/c)$, puis des coordonnées angulaires associées qui sont déjà corrigées de l'effet de l'aberration.

Le calcul séparé des écarts apparaît ainsi comme une approximation au premier ordre (approximation tangentielle) du calcul combiné de ce que l'on nomme parfois l'**aberration planétaire**. En pratique les 2 méthodes donnent le même résultat.

Rappelons que le temps t utilisé pour ces calculs est le temps des éphémérides qui est égal au temps universel plus le Δt défini au paragraphe 2.2.3.

7.5 Correction de la parallaxe diurne

Si l'erreur de parallaxe due à la distance de l'observateur au centre de la Terre est négligeable dans le cas des étoiles, elle ne l'est plus dans le cas des planètes et en particulier dans le cas de la Lune. Pour les corps près de la Terre, comme la Lune, le plus simple est de calculer leurs coordonnées cartésiennes dans un repère topocentrique (ayant son origine située au lieu d'observation). Pour le corps plus éloignés, on peut procéder à une correction des coordonnées équatoriales par des formules approchées au premier ordre.

7.5.1 Calcul exact en cartésien

Considérons une base équatoriale géocentrique tournée autour de l'axe polaire d'un angle égal au temps sidéral local, c'est-à-dire une base dont l'axe des x est contenu dans le méridien du lieu. Dans cette base les coordonnées de l'observateur A sont données par :

$$OA = \begin{pmatrix} X \\ Z \end{pmatrix}$$

où X et Z sont donnés par 5.6. Dans cette même base, les coordonnées cartésiennes de l'astre E s'obtiennent directement en fonction de son angle horaire H , de sa déclinaison δ et de sa distance géocentrique D par :

$$OE = D \begin{pmatrix} \cos H \cos \delta \\ -\sin H \cos \delta \\ \sin \delta \end{pmatrix}$$

Dans le repère d'origine A et de même orientation, les coordonnées de l'astre s'écrivent $AE = OE - OA$, soit :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D \cos H \cos \delta - X \\ -D \sin H \cos \delta \\ D \sin \delta - Z \end{pmatrix} = D' \begin{pmatrix} \cos H' \cos \delta' \\ -\sin H' \cos \delta' \\ \sin \delta' \end{pmatrix}$$

où $D' = \|AE\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ et où δ' et H' sont la déclinaison et l'angle horaire corrigés de la parallaxe diurne :

$$\begin{aligned} H' &= H + \Delta H \\ \delta' &= \delta + \Delta \delta \end{aligned}$$

Il en résulte que :

$$\begin{aligned} H' &= \arctan 2(-y, x) = \arctan 2(D \sin H \cos \delta, D \cos H \cos \delta - X) \\ \delta' &= \arcsin \left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right) = \arctan \left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \end{aligned}$$

Comme $\Delta H = -\Delta \alpha$, on peut en déduire l'ascension droite corrigée :

$$\alpha' = \alpha + H - H'$$

7.5.2 Corrections au premier ordre

A l'exception de la Lune qui est trop proche, on peut utiliser pour tous les autres astres des relations approchées au premier ordre.

Notons θ l'angle entre les directions OA et OE. En écrivant le produit scalaire de ces deux vecteurs on obtient :

$$D\sqrt{X^2 + Z^2} \cos \theta = D(X \cos H \cos \delta + Z \sin \delta)$$

Il en résulte que la distance D' est donnée, dans le triangle AOE par :

$$D'^2 = D^2 + (X^2 + Z^2) - 2D(X \cos H \cos \delta + Z \sin \delta)$$

En ne retenant que les termes du premier ordre, il vient :

$$\begin{aligned} \left(\frac{D'}{D}\right)^2 &\simeq 1 - \frac{2}{D}(X \cos H \cos \delta + Z \sin \delta) \\ \frac{D'}{D} &\simeq 1 - \frac{1}{D}(X \cos H \cos \delta + Z \sin \delta) \\ \frac{D}{D'} &\simeq 1 + \frac{1}{D}(X \cos H \cos \delta + Z \sin \delta) \end{aligned}$$

En développant au premier ordre l'expression de $\tan(H')$, on obtient :

$$\begin{aligned} \tan(H - \Delta\alpha) &= \frac{D \sin H \cos \delta}{D \cos H \cos \delta - X} \\ \tan H - \frac{\Delta\alpha}{\cos^2 H} &\simeq \frac{\tan H}{1 - X/D \cos H \cos \delta} \\ &\simeq \tan H + \frac{X \sin H}{D \cos^2 H \cos \delta} \end{aligned}$$

d'où :

$$\Delta\alpha = -\frac{X \sin H}{D \cos \delta}$$

En développant $\sin \delta' = \frac{1}{D'}(D \sin \delta - Z)$, il vient :

$$\begin{aligned} \sin \delta + \Delta\delta \cos \delta &\simeq \left(1 + \frac{1}{D}(X \cos H \cos \delta + Z \sin \delta)\right) \left(\sin \delta - \frac{Z}{D}\right) \\ &\simeq \sin \delta + \frac{\cos \delta}{D}(X \cos H \sin \delta - Z \cos \delta) \end{aligned}$$

d'où :

$$\Delta\delta \simeq \frac{1}{D}(X \cos H \sin \delta - Z \cos \delta)$$

Remarque : Les calculs traditionnels sont effectués sur des distances planétaires exprimées en UA (unités astronomiques) et sur des coordonnées X, Z de l'observateur exprimées en rayons de l'équateur terrestre (divisées par le rayon équatorial a). Ces normalisations font apparaître dans les calculs un facteur multiplicatif noté ϖ_0 qui est la parallaxe horizontale équatoriale moyenne du Soleil et qui vaut :

$$\varpi_0 = \frac{a}{UA} = 4.263521 \cdot 10^{-5} (= 8.79414'')$$

En exprimant X, Z en unités réduites par le facteur a , la distance D en UA et multipliant par le facteur ϖ_0 en secondes d'arc, on obtient $\Delta\alpha$ et $\Delta\delta$ également en secondes d'arc.

Chapitre 8

Heures solaires et heures sidérales

8.1 L'équation du temps

L'analemme présenté figure 2.1 est une visualisation spectaculaire de la différence entre l'heure solaire vrai et l'heure solaire civile basée sur le soleil moyen équatorial. Nous avons signalé au paragraphe 2.2.1 que l'angle horaire du soleil moyen équatorial et l'angle horaire du soleil vrai est appelée équation du temps :

$$E(t) = H_{\odot} - H_{\ominus}$$

Pour effectuer ce calcul on remplace les angles horaires H par les ascensions droites grâce à la relation $H = T_{sid} - \alpha$. Les T_{sid} vont disparaître dans la différence. Mais pour faire cette différence, il faut que les ascensions droites soient relatives au même point γ origine, ce qui n'est pas le cas car α_{\odot} est relative à γ vrai et α_{\ominus} est relative à γ_m moyen. On transforme, par exemple cette dernière pour la compter à partir de γ vrai en lui ajoutant $\Delta\alpha = \Delta\psi \cos \bar{\varepsilon}$ (cf. 3.28) , d'où :

$$E(t) = \alpha_{\odot} - (\alpha_{\ominus} + \Delta\psi \cos \bar{\varepsilon}) \quad (8.1)$$

L'ascension droite α_{\odot} du soleil vrai est donnée en fonction de la longitude moyenne du soleil vrai λ_{\odot} par 7.8 :

$$\alpha_{\odot} = \text{atan2}(\sin \lambda_{\odot} \cos \bar{\varepsilon}, \cos \lambda_{\odot})$$

où $\bar{\varepsilon}$ est l'obliquité donnée par 3.6, et où λ_{\odot} est calculé à partir de la longitude du Soleil écliptique moyen L donnée par 7.4 et de l'équation au centre C donné par 7.3 :

$$\lambda_{\odot} = L + C$$

L'équation de l'ascension droite α_{\odot} du Soleil équatorial moyen, qui s'annule en même temps que lui au point gamma moyen et qui a même périodicité (l'année tropique) est la même que l'équation de la longitude L du Soleil écliptique moyen. On a donc :

$$\alpha_{\odot} = L$$

bien que ces deux variables ne représentent pas la même quantité.

D'où :

$$E(t) = \text{atan2}(\sin \lambda_{\odot} \cos \bar{\varepsilon}, \cos \lambda_{\odot}) - L - \Delta\psi \cos \bar{\varepsilon}$$

Généralement on écrit cette expression sous la forme de la somme de 2 termes :

$$E(t) = R + C$$

avec ;

$$\begin{aligned} R &= \alpha_{\odot} - \Delta\psi \cos \bar{\varepsilon} - \lambda_{\odot} \\ R &= \text{atan2}(\sin \lambda_{\odot} \cos \bar{\varepsilon}, \cos \lambda_{\odot}) - \Delta\psi \cos \bar{\varepsilon} - \lambda_{\odot} \end{aligned}$$

R est appelé *la réduction à l'équateur*. Elle traduit l'influence de la projection du mouvement de l'écliptique sur l'équateur.

C est *l'équation au centre* qui traduit l'influence de l'excentricité de l'ellipse.

Pour tracer l'allure de l'évolution annuelle de R , C et E on peut utiliser les expressions qui sont résumées et simplifiées ci-après :

$$\begin{aligned}
 C &= 1^\circ,91 \sin\left(357^\circ,53 + \frac{360}{365.259636}d\right) \\
 L &= 280^\circ,47 + \frac{360}{365.24219}d \\
 \lambda_\odot &= L + C \\
 \bar{\varepsilon} &= 23^\circ,44 \\
 \Delta\psi &= -0.287^\circ \sin\left(125.04^\circ - \frac{1934.13}{36525}d\right) - 0.0217 \sin 2L \\
 R &= \text{atan2}(\sin \lambda_\odot \cos \bar{\varepsilon}, \cos \lambda_\odot) - \Delta\psi \cos \bar{\varepsilon} - \lambda_\odot
 \end{aligned}$$

où d est le nombre de jours décimaux écoulés depuis J2000.

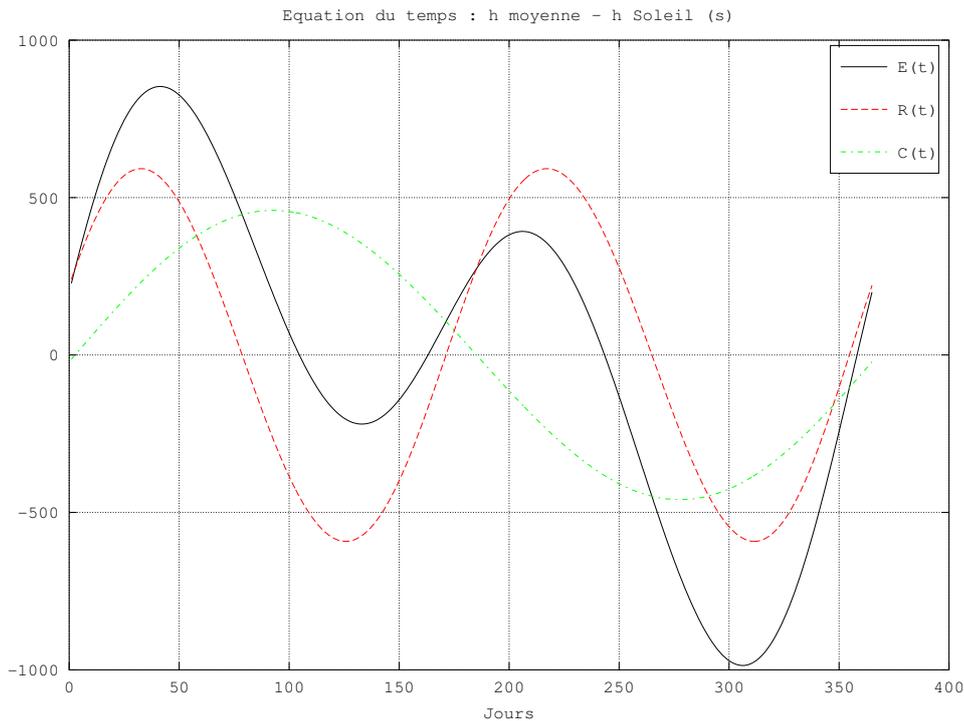


Figure 8.1: Équation du temps du 1/1/2016 au 1/12017

La figure 8.1 montre les évolutions pour l'année 2016 de l'équation du temps (trait plein noir), de l'équation du centre (trait d'axe vert) et de la réduction à l'équateur (traits tiretés rouge).

- L'équation au centre qui est la différence angulaire entre le Soleil vrai et la Soleil écliptique moyen provient du fait que le Soleil vrai va plus vite quand il est au périégée et plus lentement quand il est à l'apogée. Comme le Soleil est à son périégée vers le 4 janvier, la courbe représentative de C est proche d'une sinusoïde d'amplitude 458 secondes ($1^\circ,91 \times 3600/15$) passant à zéro quand la Terre est au périhélie vers le 4 janvier.
- La réduction à l'équateur R qui est la différence entre l'ascension droite du Soleil équatorial moyen et de l'ascension droite du Soleil écliptique moyen, a également une allure sinusoïdale qui s'annule aux équinoxes, lorsque ces deux soleils moyens passent simultanément par la ligne des équinoxes et aux solstices où ils sont également en phase. Entre les équinoxes et les solstices la réduction R prend ses valeurs maximales qui, en valeur absolue, valent environ $45^\circ - \text{atan2}(\sin 45^\circ \cos \bar{\varepsilon}, \cos 45^\circ)$ c'est-à-dire $2^\circ,464$ soit environ 591 secondes de temps.

Remarque : Nous avons pris en compte la différence des origines γ vrai et γ_m moyen dans l'équation du temps 8.1, mais une correction a été oubliée : α_\odot est une mesure géocentrique alors que α_\oplus est une mesure relative au barycentre Terre-Lune ce qui introduit une erreur de parallaxe de période synodique (29.53 jours) et d'amplitude maximale $\pm 6.4''$ (± 0.42 s de temps, c'est-à-dire un peu moins d'une seconde crête-crête en 15 jours), négligeable devant les autres termes. En effet, la Lune étant à environ 384400 km de la Terre et 82.64 fois plus légère, la

distance du barycentre est à $384400/83.64 \simeq 4596$ km du centre de la Terre, soit à environ 1775 km sous la surface de la Terre. Ainsi Terre et Lune tournent en opposition de phase autour de ce barycentre en 29.53 jours par rapport à un alignement solaire.

8.2 Heure sidérale et heure solaire aux équinoxes

L'heure sidérale est une quantité sans lien particulier avec l'heure solaire. Elle donne l'angle entre le méridien passant par le point γ et le méridien du lieu. Comme pour une date donnée, il y a un point γ_m moyen de la date donnée et un point γ vrai de la date donnée, il y a deux heures sidérales, une moyenne relative à γ_m moyen et une apparente relative à γ vrai, mais qui sont à moins de 2 secondes d'heure l'une de l'autre. Toutefois, il y a deux dates particulières pour lesquelles l'heure sidérale a une relation forte avec l'heure solaire. Le jour de l'équinoxe de printemps, le soleil vrai est dans la direction du point γ vrai. Ce jour là à midi, l'heure sidérale apparente est nulle et l'heure solaire vrai vaut 12h. Le jour de l'équinoxe d'automne le soleil vrai est dans la direction opposée au point γ vrai. Ce jour là à midi, l'heure sidérale apparente est nulle et l'heure solaire vrai est également nulle. Mais comme nous venons de le voir avec l'équation du temps le soleil vrai a un écart angulaire $E(t)$ avec le soleil moyen équatorial qui définit le temps universel. Lors des équinoxes cet écart est essentiellement dû à l'équation du centre $C(t)$ qui mesure l'angle entre le soleil moyen écliptique et le soleil vrai, car à ces époques la réduction à l'équateur $R(t)$ qui mesure l'angle des méridiens passant par le soleil moyen écliptique et par le soleil moyen équatorial du temps civil est elle aussi quasiment nulle. Ainsi l'absence de coïncidence entre heure sidérale et heure universelle lors de l'équinoxe d'automne est essentiellement due à l'équation du centre $C(t)$.

Chapitre 9

Satellites artificiels

Ce chapitre présente les équations qui permettent de situer les satellites artificiels de la Terre. Elles sont basées sur une modélisation de leurs trajectoires au moyen d'ellipses (voir section 6) dont la Terre occupe un des foyers. Par ailleurs, alors que pour les planètes les équations sont des fonctions du temps des éphémérides, ici ce sont des fonctions du temps universel.

9.1 Éléments orbitaux d'un satellite terrestre

Le plan orbital du satellite coupe l'équateur terrestre en deux points N et N'. Le point N appelé *nœud ascendant* est du côté où le satellite traverse l'équateur terrestre en passant du côté sud au côté nord.

On peut associer au plan orbital du satellite terrestre S, un repère $\mathcal{R}_N = \{\mathbf{T}, \mathcal{B}_N\}$ d'origine le centre T de la Terre :

- \vec{x}_N est selon l'intersection du plan orbital et du plan équatorial, vers le nœud ascendant N,
- \vec{z}_N est selon la normale au plan orbital dirigé selon le moment cinétique du satellite ($\vec{h} = \overrightarrow{\text{TS}} \times \vec{V}_S$).

On définit :

- Ω l'*ascension droite du nœud ascendant* (rotation autour de \vec{z}_C) : $\Omega = \angle(\vec{x}_\gamma, \vec{x}_N)$
- i l'*inclinaison* du plan orbital du satellite (rotation autour de \vec{x}_N) : $i = \angle(\vec{z}_C, \vec{z}_N)$

La matrice de passage de \mathcal{B}_C à \mathcal{B}_N est donnée par :

$$R_{CN} = R_Z(\Omega) R_X(i) = \begin{pmatrix} \cos \Omega & -\sin \Omega & 0 \\ \sin \Omega & \cos \Omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos i & -\sin i \\ 0 & \sin i & \cos i \end{pmatrix}$$
$$R_{CN} = \begin{pmatrix} \cos \Omega & -\cos i \sin \Omega & \sin i \sin \Omega \\ \sin \Omega & \cos i \cos \Omega & -\sin i \cos \Omega \\ 0 & \sin i & \cos i \end{pmatrix} \quad (9.1)$$

Les 6 *éléments orbitaux* dans le cas des satellites sont :

1. a le *demi-grand axe* de l'ellipse,
2. e son *excentricité*,
3. ω l'*argument du périhélie* de l'ellipse $\omega = \angle(\vec{x}_N, \vec{x}_P)$ positif dans le sens de parcours, et où \vec{x}_P est selon $\overrightarrow{\text{TP}}$, le point P étant le *périhélie* de l'orbite (point du grand axe de l'ellipse le plus proche de la Terre),
4. n le *mouvement moyen* est la pulsation orbitale, liée à la période τ de l'orbite par $n = \frac{2\pi}{\tau}$,
5. t_P l'instant de passage au périhélie,
6. M l'*anomalie moyenne* donnée par $M = n(t - t_P) = \frac{2\pi}{\tau}(t - t_P) = 2\pi \frac{\sigma}{\Sigma}$.

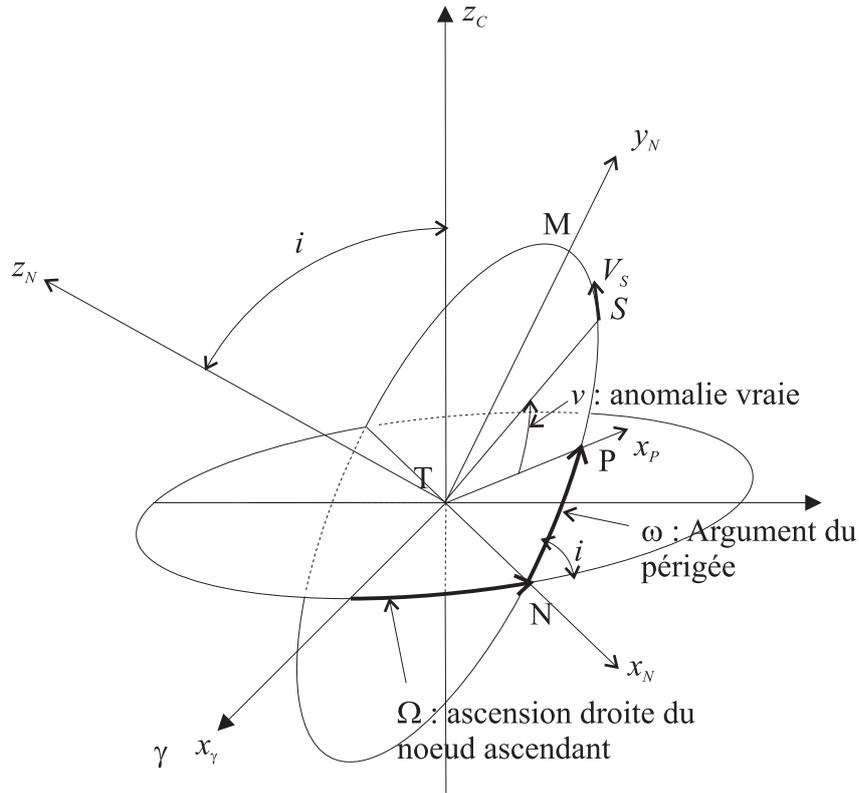


Figure 9.1: Éléments orbitaux fixant le plan de l'orbite

9.2 Principe du calcul de la position

Reprenons les étapes du calcul de la position d'un corps sur une orbite elliptique présentées en 6.4 et complétons les pour prendre en compte la position de l'orbite dans le repère équatorial \mathcal{R}_C :

1. Calcul de l'anomalie moyenne à l'instant t : $M = n(t - t_P)$
2. Calcul de l'anomalie excentrique E par résolution de l'équation de Kepler : $M = E - e \sin E$
3. Calcul de la position dans le repère plan : x_P et y_P :
$$\begin{cases} x_P = a(\cos E - e) \\ y_P = b \sin E \end{cases}$$
4. Si l'anomalie vraie v est désirée, calcul de v par : $v = \text{atan2}(y_P, x_P)$
5. Si la distance r est désirée, calcul de r par $r = a(1 - e \cos E)$ ou par $r = \sqrt{x_P^2 + y_P^2}$ ou encore par $r = \frac{a(1-e^2)}{1+e \cos v}$
6. Coordonnées dans le repère \mathcal{R}_N de l'orbite : $(TS)_N = \begin{pmatrix} x_P \cos \omega - y_P \sin \omega \\ x_P \sin \omega + y_P \cos \omega \\ 0 \end{pmatrix}$ ou bien $(TS)_N = r \begin{pmatrix} \cos(\omega + v) \\ \sin(\omega + v) \\ 0 \end{pmatrix}$
7. Coordonnées dans \mathcal{R}_C de centre T : $(TS)_C = R_{CN}(TS)_N$ où la matrice de changement de base R_{CN} est donnée par 9.1.

9.3 Modèle SGP. Calcul à partir des données des TLE

Les paramètres de ce modèle sont référencés par rapport au temps universel TU et les coordonnées équatoriales sont relatives à repère équatorial vrai particulier relatif à la date des données. Ce repère est appelé repère **TEME** (True Equator and Mean Date). Il est très proche d'un autre repère équatorial de la date particulier appelé **UOD** (Uniform Equinoxes of Date). Ces deux repères peuvent facilement être confondus car la différence entre les deux repères est une rotation autour de l'axe des pôles qui place **UOD** en retard sur **TEME** de la quantité $\Delta \epsilon_{\text{equinox}}$ définie en 5.17, quantité inférieure à 0.2 milliseconde de temps.

Notons \mathcal{B}_C la base du repère équatorial vrai **TOD** que nous utilisons pour repérer les directions des étoiles, des planètes et de la Lune et \mathcal{B}_T la base du repère équatorial vrai **TEME** utilisée par le modèle SGP. En première

approximation, on peut considérer que le repère **TEME** s'obtient à partir du repère **TOD** (True of Date) par une rotation :

$$R_{CT} = R_Z(\Delta\psi \cos \varepsilon) \quad (9.2)$$

(l'utilisation de $\Delta\psi$, ε et $\Delta\varepsilon$ est documentée en section 3.5.3). Comme $\max(\Delta\psi) \simeq 17''$ d'arc, cette rotation est équivalente à un retard au plus égal 1 seconde de temps.

En notant \mathcal{B}_M la base du repère équatorial moyen **MOD**, on passe de \mathcal{B}_M à \mathcal{B}_T par le produit de rotations :

$$R_{MT} = R_{MC}R_{CT}$$

où R_{MC} est défini par l'équation 3.30. Il en résulte dans l'approximation des micro-rotations :

$$R_{MT} \simeq \begin{pmatrix} 1 & \Delta\psi \cos \varepsilon & \Delta\psi \sin \varepsilon \\ -\Delta\psi \cos \varepsilon & 1 & \Delta\varepsilon \\ -\Delta\psi \sin \varepsilon & -\Delta\varepsilon & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\Delta\psi \cos \varepsilon & 0 \\ \Delta\psi \cos \varepsilon & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R_{MT} \simeq \begin{pmatrix} 1 & 0 & \Delta\psi \sin \varepsilon \\ 0 & 1 & \Delta\varepsilon \\ -\Delta\psi \sin \varepsilon & -\Delta\varepsilon & 1 \end{pmatrix}$$

qui est identique à la définition du passage entre les repères **MOD** et **TEME** utilisée par l'AOES (Atmospheric, Oceanic and Earth Sciences).

Le passage de la base \mathcal{B}_C du repère équatorial vrai **TOD** à la base \mathcal{B}_G du repère équatorial pseudo-lié à la Terre **PEF** fait appel à la rotation $R_Z(T_{SG})$ où T_{SG} est le temps sidéral apparent de Greenwich. Mais la base \mathcal{B}_T du repère **TEME** est en retard de $\Delta\psi \cos \varepsilon$ sur la base \mathcal{B}_C du repère **TOD** ce qui fait qu'on peut considérer que le passage de la base \mathcal{B}_T du repère équatorial **TEME** à la base \mathcal{B}_G du repère équatorial pseudo-lié à la Terre **PEF** fait appel à la rotation :

$$R_{TG} = R_Z(T_{SG} - \Delta\psi \cos \varepsilon_{MSG}) \quad (9.3)$$

où :

$$T_{SG} - \Delta\psi \cos \varepsilon \simeq T_{MSG}$$

est le temps sidéral moyen de Greenwich.

En résumé, les procédures de calcul des positions des satellites fournissent leurs coordonnées dans un repère équatorial vrai particulier **TEME** de base \mathcal{B}_T . Pour obtenir les coordonnées dans la base \mathcal{B}_G du repère équatorial pseudo-lié à la Terre **PEF**, au lieu d'utiliser comme habituellement le temps sidéral apparent T_{SG} dans la matrice de rotation R_Z on utilisera le temps sidéral moyen T_{MSG} , ce qui offre l'avantage d'éviter le calcul de la correction en nutation $\Delta\psi$.

Remarque : En retardant **TEME** de la quantité $\Delta eq_{equinox}$ par la micro-rotation $R_Z(-\Delta eq_{equinox})$ on obtient la matrice de passage :

$$R_{MU} \simeq \begin{pmatrix} 1 & -\Delta eq_{equinox} & \Delta\psi \sin \varepsilon \\ \Delta eq_{equinox} & 1 & \Delta\varepsilon \\ -\Delta\psi \sin \varepsilon & -\Delta\varepsilon & 1 \end{pmatrix}$$

entre les repères **MOD** et **UOD** que le lecteur pourra rencontrer dans certains documents (éventuellement présentée sous sa forme transposée).

9.4 Les TLE

Les éléments orbitaux des satellites civils sont régulièrement publiés par le NORAD (North American Aerospace Defense Command). On les trouve sur internet à l'adresse suivante : <https://www.celestrak.com/NORAD/elements/>.

Ces éléments orbitaux sont publiés dans des fichiers textes sous une forme particulière appelée TLE (Two line elements) car les données de chaque satellite occupent les 2 lignes qui suivent son nom dans le fichier.

9.4.1 Les données

Examinons, à titre d'exemple les éléments de la station spatiale internationale, lancée en 1998 et relevés à la date $t_0 = 15$ mai 2006 à 5h4mn40s en temps universel, c'est-à-dire le jour julien 2453870.71157407. Or le 1/1/2006 0h est le jour julien 2453736.5, ce qui fait que la date du relevé a eu lieu 134.21157407 jours après, c'est-à-dire le jour numéro 135.21157407 de l'année 2006 (valeur qui figure dans le champ d'octets 21 à 32 de la première ligne).

ISS

1 25544U 98067A 06135.21157407 .00015639 00000-0 10525-3 0 9374

2 25544 51.6372 357.2488 0009395 201.6355 305.7920 15.75323050427966

- Ligne 1: 11 caractères maximum pour le nom du satellite (ISS)
- Ligne 2 : 69 caractères pour des renseignements généraux,
- Ligne 3 : 69 caractères sur les paramètres orbitaux.

Codage de la ligne 2 (dite “line 1”) :

- b1 : numéro de la ligne (1)
- b3-7 : numéro identifiant le satellite dans le catalogue NORAD ou US Space Command (25544)
- b8 : une lettre U=Unclassified, C=Classified, S=Secret,
- b10-17 : facultatif,
 - b10-11 : 2 derniers chiffres de l’année de tir (98),
 - b12-14 : numéro de lancement dans l’année (067),
 - b15-17 : lettres complémentaires (A),
- b19-20 : 2 derniers chiffres de l’année en cours (06),
- b21-32 : date des données, jour dans l’année en partie entière (135) et partie fractionnaire (21157407), en temps UTC,
- b34-b43 : 1/2 de la dérivée première du mouv. moyen (rév./jour au carré),
- b45-52 : 1/6 de la dérivée seconde du mouv.moyen (rév./jour au cube) sans point décimal,
- b54-61 : Terme balistique SGP4 sans point décimal,
- b63 : type d’éphémérides, en général 0,
- b65-68 : numéro du jeu d’éléments, incrémenté à chaque parution et remis à 0 lorsqu’il atteint 9999,
- b69 : vérification de la somme de tous les éléments de la ligne, avec (lettres ou case vide ou points= 0 ; signe - = 1; signe + = 2, chiffre =valeur); cette somme est prise modulo 10. Ici 4.

Codage ligne 3 (dite “line 2”) :

2 25544 51.6372 357.2488 0009395 201.6355 305.7920 15.75323050427966

- b1 : numéro de la ligne (2),
- b3-7 : numéro du satellite, comme plus haut,
- b9-16 : inclinaison en degrés, le point a une place précise en 4ème position, ici $i = 51^\circ.6372$,
- b18-25 : Ascension droite du nœud ascendant, le point décimal en 4ème position, ici $\Omega = 357^\circ.2488$.
- b27-33 : excentricité d’une ellipse uniquement, donnée sans point décimal, implicitement supposée < 1 : ici 0009395 pour $e = 0.0009395$,
- b35-42 : argument nodal du périégée, point décimal en 4ème position $\omega = 201^\circ.6355$,
- b44-51 : anomalie moyenne exprimée en degrés, correspondant à la date indiquée ligne 1. Ici $M_0 = 305^\circ.7920$, (point décimal est en 4ème position) où $M = n(\text{date}-tP)$ où tP désigne la date du dernier passage au périégée,
- b53-63 : mouvement moyen à la date des éléments, exprimé en révolutions par jour. Cette valeur n_0 est de l’ordre de 15 en orbite basse et 1 en géosynchrone). $n_0 = 15.75323050$ revs/jour. C’est l’équivalent de la donnée du demi grand axe à la date fournie en ligne 2. Il doit donc être actualisé régulièrement.
- b64-68 : nombre de révolutions réalisées à la date actuelle, depuis la date du tir, ici 42796,
- b69 : vérification modulo 10 de la somme comme plus haut en ligne 2.

9.4.2 Le modèle SGP

Il existe plusieurs modèles de calcul de la position et de la vitesse du satellite à partir des éléments fournis par les TLE. Ces modèles sont appelés *Simplified General Perturbation Propagator* (SGP). Nous présentons ici le plus simple. Il utilise les unités particulières suivantes :

- les durées T sont exprimés en minutes (à partir de l’époque t_0 de mesure des TLE),
- les distances sont exprimées en nombre de rayon équatorial terrestre.

A l’issue du calcul, il faut donc multiplier toutes les positions et toutes les vitesses par le rayon équatorial terrestre r_E , et multiplier toutes les vitesses par 60, si on veut se ramener à des unités de distance par seconde.

En plus des éléments orbitaux figurant dans la TLE, les constantes suivantes sont utilisées :

- r_e : le rayon équatorial terrestre en km (noté x_{kmper} en km)
- g_e : la constante de gravitation G que multiplie la masse M_T de la Terre (notée g_e en km^3/s^2)
- $k_e = 60\sqrt{\frac{g_e}{r_e^3}}$: variante de la constante précédente (notée x_{ke} en rd/minute),
- a_e : l’unité de distance exprimée en rayon terrestre (notée $a_e = 1$),
- J_2, J_3 et J_4 : les deuxième, troisième et quatrième harmoniques zonaux gravitationnel de la Terre (notés x_{j2}, x_{j3}, x_{j4}).

Dans un premier temps, les constantes et les éléments des TLE sont utilisés pour calculer un certain nombre de coefficients intervenant dans des facteurs correctifs. Puis ces facteurs servent à obtenir des éléments orbitaux plus précis. Posons :

$$T = t - t_0$$

période de temps écoulée entre l'instant de calcul t et l'époque t_0 des TLE.

- Première approximation du demi-grand axe de l'ellipse :

$$a_1 = \left(\frac{k_e}{n_0} \right)^{2/3}$$

- a_0 deuxième approximation prenant en compte J_2 :

$$\delta_1 = \frac{3}{4} J_2 \frac{a_e^2}{a_1^2} \frac{(3 \cos^2 i_0 - 1)}{(1 - e_0^2)^{3/2}}$$

$$a_0 = a_1 \left(1 - \frac{1}{3} \delta_1 - \delta_1^2 - \frac{184}{81} \delta_1^3 \right)$$

- Estimation de la vitesse de variation de l'ascension droite :

$$p_0 = a_0 (1 - e_0^2)$$

$$\dot{\Omega} = -\frac{3}{2} J_2 \frac{a_e^2}{p_0^2} n_0 \cos i_0$$

- Estimation de la vitesse de variation de l'argument du périégée :

$$\dot{\omega} = \frac{3}{4} J_2 \frac{a_e^2}{p_0^2} n_0 (5 \cos^2 i_0 - 1)$$

- Actualisation du mouvement moyen :

$$\dot{M} = n_0 + \dot{n}_0 T + \frac{\ddot{n}_0}{2} T^2$$

- Actualisation du demi-grand axe de l'ellipse :

$$a = a_0 \left(\frac{n_0}{\dot{M}} \right)^{2/3}$$

- Actualisation de :

$$\Omega = \Omega_0 + \dot{\Omega} T$$

$$\omega = \omega_0 + \dot{\omega} T$$

$$M = M_0 + n_0 T + \frac{\dot{n}_0}{2} T^2 + \frac{\ddot{n}_0}{6} T^3$$

- Estimation de $a_x = e \cos \omega$ et $a_y = e \sin \omega$:

$$e = \begin{cases} 1 - \frac{a_0(1 - e_0)}{a} & \text{si } a > a_0(1 - e_0) \\ 10^{-6} & \text{si } a \leq a_0(1 - e_0) \end{cases}$$

$$a_x = e \cos \omega$$

$$a_y = e \sin \omega - \frac{1}{2} \frac{J_3}{J_2} \frac{a_e}{a(1 - e^2)} \sin i_0$$

- Actualisation de $U = M + \omega$:

$$U = M + \omega - \frac{1}{4} \frac{J_3}{J_2} \frac{a_e}{a(1 - e^2)} a_x \sin i_0 \frac{(3 + 5 \cos i_0)}{(1 - \cos i_0)}$$

- Résolution itérative de l'équation de Kepler modifiée par l'algorithme (6.2), en initialisant $E + \omega$ à U .

- Calcul d'une valeur améliorée de l'excentricité :

$$e = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \rightarrow p = a(1 - e^2)$$

- Les produits $e \cos E$ et $e \sin E$ sont calculées par les relations :

$$\begin{aligned} e \cos E &= a_x \cos(E + \omega) + a_y \sin(E + \omega) \\ e \sin E &= a_x \sin(E + \omega) - a_y \cos(E + \omega) \end{aligned}$$

- Les lignes trigonométriques $\cos u$, $\sin u$ ont calculées par les relations :

$$\begin{aligned} \cos u &= \frac{1}{1 - e \cos E} \left(\cos(E + \omega) - a_x + a_y \frac{e \sin E}{1 + \sqrt{1 - e^2}} \right) \\ \sin u &= \frac{1}{1 - e \cos E} \left(\sin(E + \omega) - a_y - a_x \frac{e \sin E}{1 + \sqrt{1 - e^2}} \right) \end{aligned}$$

- Il en résulte une valeur de u qui est utilisée pour affiner les éléments orbitaux suivants :

$$\begin{aligned} r_k &= r + \frac{1}{4} J_2 \frac{a_e^2}{p} \sin^2 i_0 \cos 2u \\ u_k &= u - \frac{1}{8} J_2 \frac{a_e^2}{p^2} (7 \cos^2 i_0 - 1) \sin 2u \\ \Omega_k &= \Omega + \frac{3}{4} J_2 \frac{a_e^2}{p^2} \cos i_0 \sin 2u \\ i_k &= i_0 + \frac{3}{4} J_2 \frac{a_e^2}{p^2} \sin i_0 \cos i_0 \cos 2u \end{aligned}$$

- La position du satellite dans le repère \mathcal{R}_N de l'orbite, c'est-à-dire $\{T, \vec{x}_P, \vec{y}_P\}$ est finalement obtenue à partir de ces éléments, en utilisant les formules suivantes :

$$\begin{aligned} x_P &= a \left(\cos(E + \omega) - a_x + a_y \frac{e \sin E}{1 + \sqrt{1 - e^2}} \right) \\ y_P &= a \left(\sin(E + \omega) - a_y - a_x \frac{e \sin E}{1 + \sqrt{1 - e^2}} \right) \end{aligned}$$

d'où :

$$(TS)_N = \begin{pmatrix} x_P \\ y_P \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Les coordonnées dans \mathcal{R}_C de centre T sont obtenues par : $(TS)_C = R_{TC}^T R_{TN} (TS)_N$

Dans cette dernière transformation R_{TN} est donnée par la relation 9.1 qui donne habituellement R_{CN} , mais ici, les éléments orbitaux ne sont pas relatif au repère céleste habituel **TOD**, mais au repère **TEME**. La matrice R_{TC}^T est la transposée de la matrice R_{CT} donnée par la relation 9.2. Rappelons qu'elle représente un retard temporel au plus égal à 1 seconde de temps.

Si on désire les coordonnées directement dans le repère de Greenwich \mathcal{R}_G on fera directement :

$$(TS)_G = R_{TG}^T R_{TN} (TS)_N$$

où R_{TG} est donnée directement en fonction du temps sidéral **moyen** de greenwich par la relation 9.3.

9.5 Inversion de la position sur orbite

Nous avons présenté en 6.5 le calcul d' l'instant t qui correspond à une valeur de l'anomalie vraie donnée. Détaillons ce calcul dans le cas où les paramètres orbitaux sont connus à partir des TLE.

Posons :

$$\tau = t - t_0$$

où t_0 est la date des éléments orbitaux.

L'anomalie vraie correspondant à la position α est obtenue par :

$$v = \alpha - \omega_0 - \dot{\omega}\tau$$

Les lignes trigonométriques de l'anomalie excentrique et l'anomalie excentrique sont calculées par :

$$\begin{aligned} \cos E &= \frac{e + \cos v}{1 + e \cos v} \\ \sin E &= \frac{\sqrt{1 - e^2} \sin v}{1 + e \cos v} \\ E &= \text{atan2}(\sin E, \cos E) \end{aligned}$$

L'anomalie moyenne est obtenue par :

$$M = E - e \times \sin E$$

Pour remonter à l'instant cherché, on passera par l'intermédiaire d'une anomalie moyenne de référence correspondant à un instant de référence t_{ref} proche de l'instant cherché qui sera calculée par :

$$M_{ref} = M_0 + n_0\tau + \frac{\dot{n}_0}{2}\tau^2 + \frac{\ddot{n}_0}{6}\tau^3 \quad (9.4)$$

et par le mouvement moyen correspondant qui vaut :

$$n = n_0 + \dot{n}_0\tau + \frac{\ddot{n}_0}{2}\tau^2$$

Notons :

$$\Delta M = M - M_{ref}$$

Dans cette différence l'anomalie moyenne obtenue par $M = E - e \times \sin E$ est a priori comprise entre -2π et 2π , alors que M_{ref} calculée par 9.4 peut être vraiment quelconque et contenir un très grand nombre de tours. Pour chercher l'instant t de passage par α on se limite à une période nodale située après t_{ref} ou avant, ou à cheval. Pour cela on effectuera une opération de modulo sur ΔM . A titre d'exemple, l'instant de passage dans l'orbite qui suit t_{ref} sera obtenue par :

$$t = t_{ref} + \frac{\text{modulo}(\Delta M, 2\pi)}{n}$$

Remarque : Dans le cas d'une utilisation itérative de cet algorithme, par exemple pour calculer les instants d'entrée et de sortie du satellite dans un cône de visibilité (voir section 9.8), l'utilisation de l'instant trouvé à l'itération précédente comme valeur de t_{ref} permet la résolution à moindre coût de l'équation 9.4. Dans ce cas, il faut prendre un modulo modifié qui renvoie un résultat compris entre $-\pi$ et π .

9.6 Orbites particulières

Parmi les orbites particulières nous citerons :

- les **orbites géosynchrones** : Le satellite se déplace dans le sens de rotation de la Terre avec une période de l'orbite τ égale à la période de rotation sidérale de la Terre (23h 56min 4.1s environ). Vue de la Terre le satellite dessine un analemme¹ d'autant plus grand que l'orbite est inclinée. Si l'inclinaison et l'excentricité son nulle, l'analemme est réduit à un point : le satellite est **géostationnaire**.
- les **orbites héliosynchrones** : La vitesse de rotation du plan de l'orbite (vitesse de variation de l'ascension droite) $\frac{d\Omega}{dt}$ est identique au mouvement moyen du Soleil $\frac{2\pi}{\tau_{tro}}$. Les heures locales de passage du satellite sont toujours les mêmes, ainsi que les conditions d'éclairement ce qui est intéressant pour comparer les photographies de la Terre prises depuis le satellite. Ces orbites passent au voisinage du pôle et sont relativement basses (200 à 1700 km) avec une période d'environ 1h30 à 2h.

1

– Voir exemple d'analemme figure 2.1

9.7 Éclairement d'un satellite terrestre

Nous présentons ci-après des équations qui permettent de préciser les conditions d'éclairement par le Soleil d'un corps dans le voisinage de la Terre.

Ce calcul s'effectue dans le plan défini par les 3 points O, T et M. O est le centre du Soleil, T est le centre de la Terre et M est un point figuratif du corps considéré. Dans ce plan on définit un repère orthonormé \mathcal{R}_P dont les axes de base \vec{i} , \vec{j} et \vec{k} sont définis par :

$$\begin{aligned}\vec{i} &= \frac{\vec{OT}}{\|\vec{OT}\|} \\ \vec{k} &= \frac{\vec{i} \times \vec{TM}}{\|\vec{TM}\|} \\ \vec{j} &= \vec{k} \times \vec{i}\end{aligned}$$

9.7.1 Approximation Soleil ponctuel à l'infini, Terre sphérique

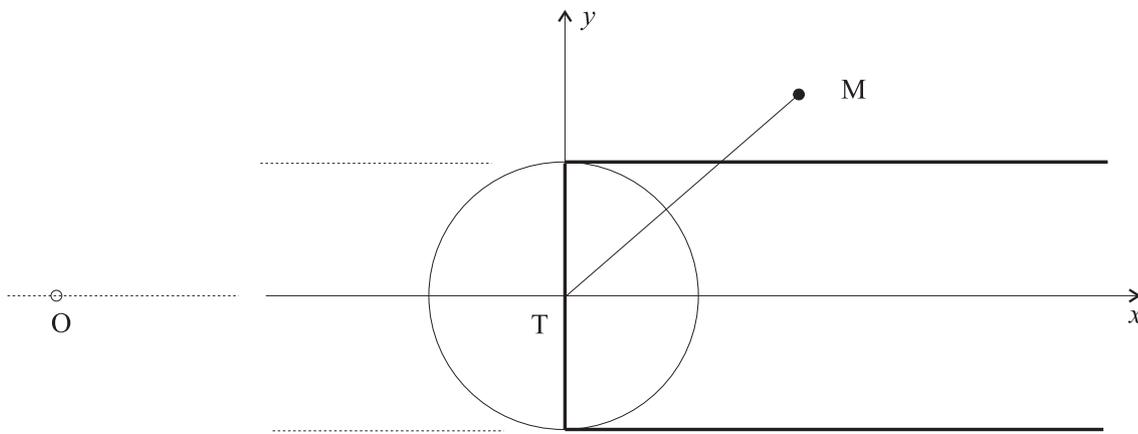


Figure 9.2: Cylindre d'ombre

Sur la figure 9.2, les coordonnées du point M sont données par :

$$\begin{aligned}x &= \vec{i} \cdot \vec{TM} \\ y &= \vec{j} \cdot \vec{TM}\end{aligned}$$

Il sera ensoleillé si $x \leq 0$, ou si $y \geq r_T$ ou $y \leq -r_T$ en désignant par r_T le rayon moyen de la terre.

9.7.2 Prise en compte réfraction et ellipticité

Sur la figure 9.3, la prise en compte de la réfraction est faite en inclinant les rayons KJ et KJ' d'un angle α vers l'axe Tx, où α sera pris égal à la valeur h_0 de l'angle de réfraction au niveau de l'horizon.

Les directions TK et TK' des points de tangence ont pour vecteurs unitaires dans \mathcal{R}_P \vec{U} et \vec{U}' définis par :

$$(U)_P = \begin{pmatrix} \sin \alpha \\ \cos \alpha \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (U')_P = \begin{pmatrix} \sin \alpha \\ -\cos \alpha \\ 0 \end{pmatrix}$$

Si $x < TA$ le point M est éclairé. Dans le cas contraire, si $y \geq 0$ le point M est éclairé si $\vec{U} \cdot \vec{TM} > TK$ et si $y \leq 0$ il est éclairé si $\vec{U}' \cdot \vec{TM} > TK'$. Dans le cas d'une Terre sphérique, on prendra $TA = r_T \sin \alpha$ et $TK = TK' = r_T$.

Prise en compte de l'ellipticité de la Terre :

Pour améliorer ce calcul, on peut prendre en compte l'ellipticité de la Terre et calculer plus précisément la valeur de TK ou TK'. On ne fera le calcul que du côté où se trouve le corps M, supérieur si $y \geq 0$ et inférieur si $y < 0$.

Notons R_{CP} la matrice de passage entre le repère géocentrique équatorial \mathcal{R}_C dans lequel on connaît les coordonnées des positions du Soleil et du corps, et le repère \mathcal{R}_P de la figure. Les coefficients de cette matrice sont obtenus à partir des composantes dans \mathcal{R}_C des vecteurs de base \vec{i} , \vec{j} et \vec{k} de \mathcal{R}_P précédemment définis :

$$R_{CP} = \left[\begin{pmatrix} \vec{i} \end{pmatrix}_C \quad \begin{pmatrix} \vec{j} \end{pmatrix}_C \quad \begin{pmatrix} \vec{k} \end{pmatrix}_C \right]$$

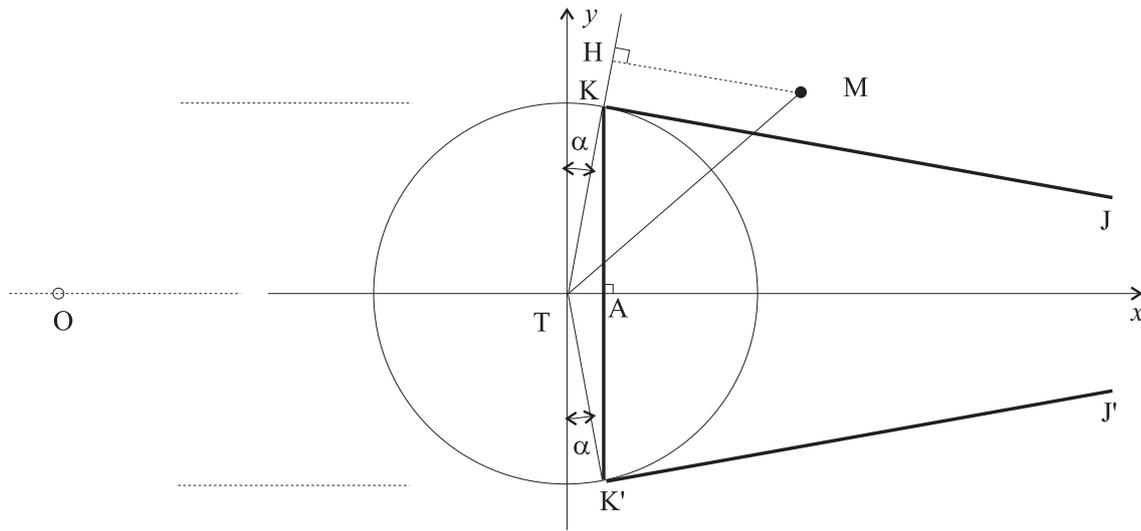


Figure 9.3: Prise en compte réfraction

Pour évaluer le rayon TK (ou TK' suivant le signe de y) on calcule les cosinus directeurs de son vecteur unitaire \vec{U} (ou \vec{U}') dans \mathcal{R}_C par :

$$(U)_C = R_{CP}(U)_P \text{ ou } (U')_P = R_{CP}(U')_C$$

A partir des 3 cosinus directeurs u, v et w de \vec{U} (ou \vec{U}') dans \mathcal{R}_C , on déduit la latitude φ (ou φ') du point K (ou K') par les relations $\cos^2 \varphi = u^2 + v^2$ et $\sin \varphi = w$.

Le rayon du sphéroïde en ce point est calculé à partir de son équation :

$$\frac{r^2 \cos^2 \varphi}{a^2} + \frac{r^2 \sin^2 \varphi}{b^2} = 1$$

d'où :

$$r^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi}$$

ou a et b sont respectivement le rayon équatorial et le rayon polaire :

$$a = 6378137 \text{ m}$$

$$b = 6356752 \text{ m}$$

Avec la valeur r trouvée, on testera d'abord si $x < r \sin \alpha$, et si ce n'est pas le cas, on testera ensuite si $\vec{U} \cdot \vec{TM} > r$ (ou $\vec{U}' \cdot \vec{TM} > r$) suivant que y est positif ou négatif.

9.7.3 Prise en compte de la taille du Soleil

Sur la figure 9.4 nous avons représenté le Soleil, la Terre et les cônes d'ombre et pénombre associés, en supposant ces deux corps parfaitement circulaires.

Les tangentes extérieures au Soleil et à la Terre se coupent en J et les tangentes intérieures se coupent en I.

Les tangentes extérieures au Soleil et à la Terre sont tangentes à la Terre aux point L et L', et les tangentes intérieures au Soleil et à la Terre sont tangentes à la Terre aux point K et K'.

On distingue 3 zones d'éclairement :

- La zone 1 d'éclairement total comprend les zones situées :
 - abscisse de M inférieure à celle du point A,
 - point M au-dessus de la droite IK
 - point M en-dessous de la droite IK'
 - une seule de ces 3 conditions est suffisante (ou logique inclusif).
- La zone d'ombre 3 est située :
 - abscisse de M supérieure à celle du point B,

Calcul du rayon TK (ou TK') :

$$r^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi}$$

ou a et b sont respectivement le rayon équatorial et le rayon polaire.

Si $x < -r \sin \alpha$, M est dans la zone 1.

Sinon, si $\vec{U} \cdot \vec{TM} > r$ (ou $\vec{U}' \cdot \vec{TM} > r$ suivant que y est positif ou négatif), M est dans la zone 1.

Si ces 2 tests échouent, on passe au test suivant.

Test d'appartenance à la zone 3 d'ombre totale :

On ne teste que le coté qui correspond au signe de y .

Calcul des cosinus directeurs u, v, w du vecteur unitaire \vec{V} (ou \vec{V}') dans \mathcal{R}_C :

$$(V)_C = R_{CP}(V)_P \text{ ou } (V')_P = R_{CP}(V')_C$$

Calcul de lignes trigonométriques de la latitude φ (ou φ') du point L (ou L') :

$$\begin{aligned} \cos^2 \varphi &= u^2 + v^2 \\ \sin \varphi &= w \end{aligned}$$

Calcul du rayon TL (ou TL') :

$$r^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi}$$

ou a et b sont respectivement le rayon équatorial et le rayon polaire.

Si $x > r \sin \beta$, M n'est peut-être dans la zone 3.

Dans ce cas, si $\vec{V} \cdot \vec{TM} < r$ (ou $\vec{V}' \cdot \vec{TM} < r$ suivant que y est positif ou négatif), M est dans la zone 3.

Si l'un quelconque de ces 2 tests échoue, on n'est pas dans la zone 3.

Appartenance à la zone 2 de pénombre.

Elle découle de la non appartenance aux 2 zones précédentes.

9.8 Intervalles de visibilité d'un satellite

Nous examinons dans cette section les conditions de visibilité réciproque entre une station d'observation et un satellite. Les calculs sont effectués en négligeant la différence entre les latitudes géocentrique et géodésique, ou plus exactement en confondant la verticale locale avec la direction du centre de la Terre.

9.8.1 Paramètres de la configuration observateur - satellite

Considérons la figure 9.5. Le centre de la Terre est noté T, le satellite est noté S et la position de l'observateur sur Terre est noté A.

Posons :

$$\begin{aligned} \vec{TS} &= r_S \vec{z}_S \text{ avec } r_S = \|\vec{TS}\| \\ \vec{TA} &= r_A \vec{z}_A \text{ avec } r_A = \|\vec{TA}\| \end{aligned}$$

Notons : α_{prox}

$$\begin{cases} \beta = \angle(\vec{z}_A, \vec{AS}) \\ \gamma = \angle(\vec{z}_S, \vec{AS}) \\ \sigma = \angle(\vec{z}_A, \vec{z}_S) \end{cases}$$

- β est la distance zénithale du satellite (vue de l'observateur)
- γ est la distance centre Terre - Station, vue du satellite
- σ est la distance zénithale géocentrique satellite (vue du centre Terre).

Ces trois angles sont liés par la relation :

$$\beta = \sigma + \gamma$$

Compte tenu des relations :

$$\|\vec{AS}\|^2 = d^2 = r_S^2 + r_A^2 - 2r_S r_A \cos \sigma$$

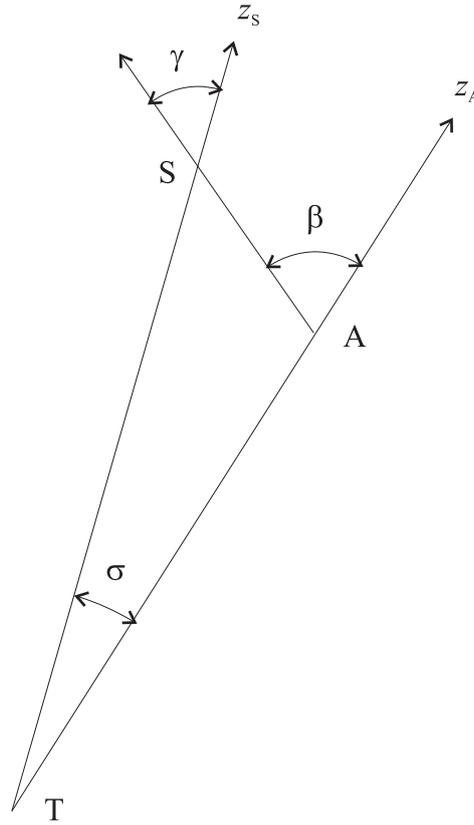


Figure 9.5: Configuration Terre - Satellite - Observateur

et :

$$\begin{cases} \vec{z}_A \cdot \vec{AS} = d \cos \beta = \vec{z}_A \cdot (r_S \vec{z}_S - r_A \vec{z}_A) = r_S \cos \sigma - r_A \\ \vec{z}_S \cdot \vec{AS} = d \cos \gamma = \vec{z}_S \cdot (r_S \vec{z}_S - r_A \vec{z}_A) = r_S - r_A \cos \sigma \end{cases}$$

On déduit les relations suivantes :

$$\cos \beta = \frac{r_S \cos \sigma - r_A}{\sqrt{r_S^2 + r_A^2 - 2r_S r_A \cos \sigma}} \tag{9.5}$$

$$\cos \gamma = \frac{r_S - r_A \cos \sigma}{\sqrt{r_S^2 + r_A^2 - 2r_S r_A \cos \sigma}} \tag{9.6}$$

relations qui étant donné la valeur absolue de σ fournissent les cosinus de β et γ et donc leurs valeurs absolues.

Remarque : Le satellite est sous l'horizon de l'observateur si $\beta > \frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire si $\cos \beta < 0$, c'est-à-dire si $r_S \cos \sigma - r_A < 0$, d'où l'implication :

$$\cos \sigma < \frac{r_A}{r_S} \Rightarrow \text{satellite sous l'horizon}$$

Inversement aux relations 9.5 et 9.6, examinons comment calculer σ à partir de la donnée de β ou γ . En se référant à la figure 9.6, posons :

$$h = \|\text{TH}\| = r_A \sin \beta = r_S \sin \gamma$$

Si β est donné peut calculer γ par :

$$\gamma = \arcsin \frac{r_A \sin \beta}{r_S}$$

avec une seule solution car comme $r_S > r_A$, l'angle γ est toujours inférieur à $\pi/2$.

Si γ est donné, on peut calculer β par :

$$\begin{aligned} \beta &= \arcsin \frac{r_S \sin \gamma}{r_A} \\ \beta &= \pi - \arcsin \frac{r_S \sin \gamma}{r_A} \end{aligned}$$

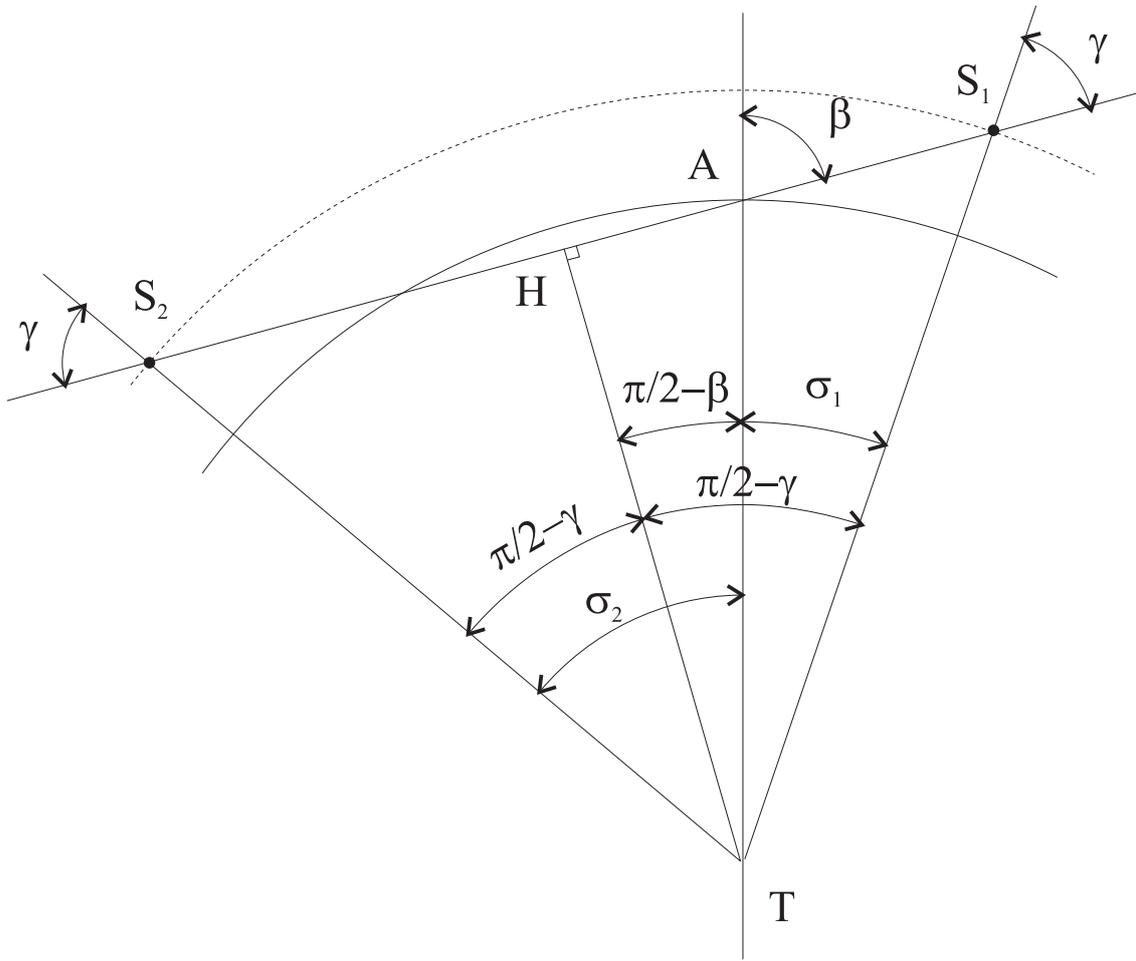


Figure 9.6: Solutions inverses

D'où les solutions σ :

$$\sigma = \beta - \gamma = \begin{cases} \beta - \arcsin \frac{r_A \sin \beta}{r_S} \\ \arcsin \frac{r_S \sin \gamma}{r_A} - \gamma \\ \pi - \arcsin \frac{r_S \sin \gamma}{r_A} - \gamma \end{cases} \quad (9.7)$$

En prenant le cosinus de ces expressions on obtient :

$$\cos \sigma = \frac{r_A \sin^2 \beta \pm \cos \beta \sqrt{r_S^2 - r_A^2 \sin^2 \beta}}{r_S} \quad (9.8)$$

$$\cos \sigma = \frac{r_S \sin^2 \gamma \pm \cos \gamma \sqrt{r_A^2 - r_S^2 \sin^2 \gamma}}{r_A} \quad (9.9)$$

Ces relations s'obtiennent également en élevant au carré les relations 9.5 et 9.6 qui deviennent des trinômes en $\cos \sigma$.

Remarques :

- Dans le cas où β est donné, $r_A \sin \beta = \|TH\|$ est toujours inférieur à r_A et comme r_S est toujours supérieur à r_A , le radical est toujours positif.
- Dans le cas où β est donné, si $\beta < \pi/2$ le satellite doit être au-dessus de l'horizon, ce qui fait que dans l'expression 9.8 on doit choisir la solution avec le signe + qui donne la plus petite valeur en σ qui correspond à σ_1 sur la figure 9.6. Si $\beta > \pi/2$ le cône de visibilité est obtus, et on vise sous l'horizon, ce qui fait que dans l'expression 9.8 on doit encore choisir la solution avec le signe + qui donne la plus grande valeur en σ qui correspond à σ_2 sur la figure 9.6.

- Dans le cas où γ est donné, si $r_S \sin \gamma > r_A$, le demi-segment issu de S n'intersecte plus la Terre. Les angles σ et β ne sont pas définis. Il en est forcément ainsi si $\gamma > \pi/2$. Le cône de visibilité issu du satellite englobe toute la Terre. La donnée de γ n'est pas significative, et une autre donnée doit être prise en compte pour traiter ce problème.

9.8.2 Calcul d'un intervalle de visibilité d'un satellite par une station

On ne peut ici utiliser la même méthode que pour les étoiles, planètes et Lune, car la vitesse de révolution des satellites peut être très élevée devant la vitesse de rotation de la terre, et l'azimut qui correspond au minimum de leur distance zénithale peut être quelconque et non limité à 0° ou 180° .

9.8.2.1 Calcul du passage par la distance zénithale géocentrique minimale

Notons :

$$\alpha = \omega + v$$

l'argument du satellite dans le repère plan orbital \mathcal{R}_N , angle également appelé position sur orbite du satellite, et cherchons l'expression de σ , distance angulaire entre observateur et satellite (vue du centre Terre), en fonction de α .

Par définition :

$$\cos \sigma = \langle \vec{z}_A \cdot \vec{z}_S \rangle$$

Évaluons cette expression en projection dans le repère plan orbital \mathcal{R}_N . Pour \vec{z}_S , on a :

$$(\vec{z}_S)_N = \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \\ 0 \end{pmatrix}$$

Évaluons $(\vec{z}_A)_N$. En considérant (λ_A, φ_A) longitude et latitude *géocentriques* du point A dans \mathcal{R}_G , on a :

$$(\vec{z}_A)_G = \begin{pmatrix} \cos \lambda_A \cos \varphi_A \\ \sin \lambda_A \cos \varphi_A \\ \sin \varphi_A \end{pmatrix}$$

La matrice de passage R_{GN} du repère de Greenwich \mathcal{R}_G au repère orbital \mathcal{R}_N s'écrit :

$$R_{GN} = R_Z(-H_{SG})R_{CN}$$

$$R_{GN} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \cos i & \sin \theta \sin i \\ \sin \theta & \cos \theta \cos i & -\cos \theta \sin i \\ 0 & \sin i & \cos i \end{pmatrix}$$

où on a posé :

$$\theta = \Omega - H_{SG}$$

D'où :

$$(\vec{z}_A)_N = C_{GN}^T (\vec{z}_A)_G = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$$

Notons :

$$\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = (\vec{z}_A)_N$$

Il vient :

$$\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi_A \cos (\lambda_A - \theta) \\ \cos \varphi_A \sin (\lambda_A - \theta) \cos i + \sin \varphi_A \sin i \\ -\sin (\lambda_A - \theta) \cos \varphi_A \sin i + \sin \varphi_A \cos i \end{pmatrix} \quad (9.10)$$

d'où :

$$\cos \sigma = A \cos \alpha + B \sin \alpha \quad (9.11)$$

où A et B sont donnés ci-dessus dans 9.10.

Le passage par la distance zénithale géocentrique minimale, correspond au minimum de σ et donc au maximum de $\cos \sigma$ qui est obtenu quand $\begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}$ est aligné avec $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$, c'est-à-dire pour :

$$\alpha_{prox} = \text{atan2}(B, A) \quad (9.12)$$

Calcul itératif de α_{prox} :

L'expression 9.12 ne permet pas de calculer directement une valeur exacte de α_{prox} car A et B n'ont pas été calculés à partir d'une valeur du temps qui correspond à l'instant où le satellite est à la position α_{prox} . Il faut donc procéder à quelques itérations pour arriver à cette correspondance. Notons T_{nod} la période nodale du satellite. Étant donné un instant initial t , on procède aux itérations suivantes :

1. Calculer H_{SG} , θ , A et B en fonction du temps t
2. Calculer α_{prox} par la relation 9.12
3. Par la méthode du paragraphe 9.5 en déduire, dans l'intervalle $[t - \frac{T_{nod}}{2}, t + \frac{T_{nod}}{2}]$ un nouvel instant t correspondant à α_{prox} .
4. Si la différence entre l'ancien t et le nouveau t est négligeable (inférieure à 1/10 de seconde par exemple), **l'itération est terminée. On a trouvé le résultat.**
5. Sinon, compter une itération de plus. Si le nombre d'itérations est faible (inférieur à 10 par exemple) recommencer en 1.
6. Sinon, considérer qu'il y a échec.

Différentes cas peuvent conduire à un échec. Une cas simple à comprendre est celui d'un satellite géostationnaire. La position α_{prox} est sur le méridien de la station, mais comme le méridien tourne à la même vitesse que le satellite, ils ne peuvent jamais coïncider (sauf s'ils coïncident en permanence).

9.8.2.2 Calcul des entrée et sortie dans la zone de visibilité

Supposons qu'on considère que le satellite est visible lorsque sa distance zénithale β est inférieure à une valeur limite β_{lim} . Les relations 9.7 et 9.8 permettent de calculer la distance zénithale géocentrique σ_{lim} entre l'observateur et le satellite vus du centre Terre. Le satellite sera visible si $\sigma < \sigma_{lim}$, ce qui définit un cône de visibilité géocentrique.

Notons σ_{prox} la distance zénithale géocentrique qui correspond à α_{prox} . Elle est donnée par :

$$\cos \sigma_{prox} = A \cos \alpha_{prox} + B \sin \alpha_{prox}$$

qui sera calculé à la fin du processus convergent vers α_{prox} . A partir de 9.7 on peut calculer $\cos \sigma_{lim}$ qui correspond à β_{lim} avec r_S actualisé à l'instant t_{prox} . Si :

$$\cos \sigma_{prox} \geq \cos \sigma_{lim} \quad (9.13)$$

alors $\sigma_{prox} < \sigma_{lim}$.

Pour effectuer ce test de visibilité on peut également calculer $\cos \beta_{prox}$ à partir de $\cos \sigma_{prox}$ en utilisant la relation 9.5 et vérifier que $\cos \beta_{prox} \geq \cos \beta_{lim}$. Généralement on calcule $\cos \beta_{prox}$ car il est intéressant de connaître la distance zénithale minimale β_{prox} , ce qui fait $\cos \beta_{prox}$ peut être utilisé pour ce test, ce qui rend inutile le calcul de $\cos \sigma_{lim}$ à la fin du processus de convergence vers σ_{prox} .

Si au passage par la distance géocentrique minimale, le satellite est à l'intérieur du cône de visibilité, on peut calculer les instants d'entrée t_{in} et sortie t_{out} de ce cône. Dans le cas contraire, ce sera inutile.

Recherchons les positions sur orbite qui correspondent à une distance zénithale géocentrique égale à σ_{lim} . Ce sont les solutions de l'équation :

$$A \cos \alpha + B \sin \alpha = \cos \sigma_{lim}$$

La condition 9.13 implique que $\sqrt{A^2 + B^2} \geq |\cos \sigma_{lim}|$, ce qui garantit l'existence des solutions :

$$\alpha_{lim} = \text{atan2}(B, A) \pm \arccos \frac{\cos \sigma_{lim}}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad (9.14)$$

Cette relation fait apparaître la valeur $\alpha_{prox} = \text{atan2}(B, A)$ pour laquelle le satellite est le plus proche de l'observateur, mais en raison de la variation de A et B entre l'instant t_{prox} , t_{in} et t_{out} , on n'utilise pas cette valeur. Du point de vue des signes, les positions sur orbite cherchées sont solution de :

$$\alpha_{in} = \text{atan2}(B, A) - \arccos \frac{\cos \sigma_{lim}}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad (9.15)$$

$$\alpha_{out} = \text{atan2}(B, A) + \arccos \frac{\cos \sigma_{lim}}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad (9.16)$$

Elles correspondent à deux instants t_{in} et t_{out} d'entrée et sortie dans le cône de visibilité.

Comme précédemment, il faut raffiner les deux valeurs t_{in} et t_{out} par itérations, indépendantes pour chaque cas, pour que les valeurs de A et B utilisées dans chacun de ces deux angles correspondent bien à chacun de ces deux instants.

Dans ces itérations, le rayon r_S est mis à jour par :

$$r_S = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos(\alpha(t) - \omega)}$$

et A et B seront mis à jour par :

$$\begin{aligned} A &= \cos \varphi_A \cos(\lambda_A - \theta(t)) \\ B &= \cos \varphi_A \sin(\lambda_A - \theta(t)) \cos i + \sin \varphi_A \sin i \end{aligned}$$

La procédure itérative de calcul de t_{in} et pour t_{out} à partir de l'angle α correspondant est la suivante. On considère un instant initial t estimé :

1. Calculer r_S , H_{SG} , θ , A et B en fonction du temps t et/ou de l'angle α
2. Calculer α_{prox} par la relation 9.12
3. Calculer $\cos \sigma_{lim}$ par la relation 9.8
4. Calculer un nouvel α par 9.15 ou 9.16
5. Par la méthode du paragraphe 9.5 en déduire, dans l'intervalle $[t - \frac{T_{mod}}{2}, t + \frac{T_{mod}}{2}]$ un nouvel l'instant t correspondant à α .
6. Si la différence entre l'ancien t et le nouveau t est négligeable (inférieure à 1/10 de seconde par exemple), **l'itération est terminée. On a trouvé le résultat.**
7. Sinon, compter une itération de plus. Si le nombre d'itérations est faible (inférieur à 10 par exemple) recommencer en 1.
8. Sinon, considérer qu'il y a échec.

Chapitre 10

Codes GNU Octave

La plupart des algorithmes décrits dans ce document ont été écrits et utilisés dans diverses applications que j'ai écrites en langage C/C++ ou en Java. Mais pour leur mise au point je suis souvent passé par une version préalable écrite en GNU-Octave (quasi Matlab). L'intérêt de ce langage est qu'il est interprété et qu'on peut très rapidement tester une fonctionnalité isolée. Cette bibliothèque de fonctions Octave se trouve dans le fichier compressé http://www.llibre.fr/michel/astro/octave_astro.zip.

Les fonctions astronomiques sont souvent fonction de nombreux paramètres comme la localisation de l'observateur (longitude, latitude, altitude), de la date par le biais de paramètres variant lentement avec le temps comme l'obliquité, etc... Pour éviter à l'utilisateur de les entrer systématiquement pour chaque appel de fonction dans une longue liste d'arguments, une fonction unique d'initialisation `initAstro` permet de les enregistrer dans des variables globales auxquelles les fonctions feront appel quand elles ne figureront pas dans leurs arguments.

De la même manière une fonction `initStars` permet de charger le catalogue `catalogV50mod.txt` de 9000 étoiles accessibles par leur numéro dans ce catalogue et le catalogue `94Stars.txt` des 94 étoiles les plus brillantes accessibles par leur nom commun.

Pour les satellites artificiels, leurs paramètres sont téléchargés depuis le site internet <http://celestrak.com/NORAD/element>

Toutes les fonctions ne sont pas décrites dans ce document, mais pour commencer le lecteur pourra essayer la fonction `_testAstro` qui affiche des informations sur un satellite, une étoile et des planètes à différentes dates.

Si vous constatez une erreur, écrivez un mail à michel@llibre.fr en remplaçant le @ par @.

Bibliographie

- [1] Jean-François Le Borgne. “*Introduction aux coordonnées célestes - Astrométrie*”. Laboratoire d’Astrophysique, Observatoire Midi-Pyrénées, 14 avenue Edouard Belin. Toulouse. <http://userpages.irap.omp.eu/~jleborgne/documents/astrometrie.pdf>
- [2] Alain Vienne. “*Introduction à l’astronomie*”. LAL-IMCCE du laboratoire d’Astronomie de Lille. Janvier 2003.
- [3] Luc Duriez. “*Cours de Mécanique céleste classique*”. LAL-IMCCE de l’Observatoire de Paris. Septembre 2002.
- [4] Jean Meeus. “*Calculs astronomiques à l’usage des amateurs*”. Société astronomique de France. Juin 2014.
- [5] Jean Meeus. “*Astronomical Algorithms*”. Willmann-Bell, Inc. 1991-2009.
- [6] “*Éphémérides astronomiques 2014 - Connaissance des temps*”. Bureau des longitudes, Institut de Mécanique Céleste et de Calcul des Éphémérides, Observatoire de Paris. EDP Sciences. Paris 2014.
- [8] “*Introduction aux éphémérides astronomiques - Supplément explicatif à la connaissance des temps*”. Bureau des longitudes, Institut de Mécanique Céleste et de Calcul des Éphémérides, Observatoire de Paris. EDP Sciences. Paris 1997.
- [7] Jean-François Le Borgne. “*Introduction aux coordonnées célestes - Astrométrie*”. Master Astrophysique - UPS, Exercices - corrigés. <http://userpages.irap.omp.eu/~jleborgne/documents/corriges.pdf>