

Corrigé BE RDV Spatial

1 Mise sous forme d'état

Soit les équations différentielles :

$$\begin{aligned}\ddot{x} - 2\omega\dot{z} &= \varphi_x \\ \ddot{z} + 2\omega\dot{x} - 3\omega^2 z &= \varphi_z\end{aligned}$$

En prenant comme vecteur d'état $X^T = (z, x, \dot{z}, \dot{x})$, elle s'écrivent :

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_3 \\ \dot{x}_2 &= x_4 \\ \dot{x}_3 &= 3\omega^2 x_1 - 2\omega x_4 + \varphi_z \\ \dot{x}_4 &= 2\omega x_3 + \varphi_x\end{aligned}$$

Soit, sous forme matricielle :

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{B}\mathbf{u} \text{ avec } \mathbf{u} = \begin{pmatrix} \varphi_z \\ \varphi_x \end{pmatrix}.$$

et :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3\omega^2 & 0 & 0 & -2\omega \\ 0 & 0 & 2\omega & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2 Gouvernabilité

2.1 Avec la poussée tangentielle φ_x seule

$$\mathbf{B}_x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{A}\mathbf{B}_x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2\omega \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{A}^2\mathbf{B}_x = \begin{pmatrix} -2\omega \\ 0 \\ 0 \\ -4\omega^2 \end{pmatrix}, \mathbf{A}^3\mathbf{B}_x = \begin{pmatrix} 0 \\ -4\omega^2 \\ 2\omega^3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & -2\omega & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4\omega^2 \\ 0 & -2\omega & 0 & 2\omega^3 \\ 1 & 0 & -4\omega^2 & 0 \end{vmatrix} = 12\omega^4$$

Le système est gouvernable avec φ_x seul.

2.2 Avec la poussée normale φ_z seule

$$\mathbf{B}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{A}\mathbf{B}_z = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2\omega \end{pmatrix}, \mathbf{A}^2\mathbf{B}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 2\omega \\ -\omega^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{A}^3\mathbf{B}_z = \begin{pmatrix} -\omega^2 \\ 0 \\ 0 \\ -2\omega^3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & -\omega^2 \\ 0 & 0 & 2\omega & 0 \\ 1 & 0 & -\omega^2 & 0 \\ 0 & 2\omega & 0 & -2\omega^3 \end{vmatrix} = 0$$

Le système n'est pas gouvernable avec la poussée normale φ_z seule.

3 Application du principe du maximum au SLCQ

3.1 Hamiltonien

Le Hamiltonien s'écrit :

$$H = \boldsymbol{\psi}^T (\mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{B}\mathbf{u}) - \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{u}$$

3.2 Intégration du système adjoint

Le système adjoint s'écrit :

$$\dot{\psi} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{X}} = -\mathbf{A}^T \psi$$

Soit :

$$\dot{\psi} + \mathbf{A}^T \psi = \mathbf{0}$$

\mathbf{A} étant constant, cette équation différentielle linéaire s'intègre en :

$$\psi(t) = e^{-\mathbf{A}^T t} \psi_0$$

en fonction du vecteur adjoint initial $\psi(0) = \psi_0$ inconnu.

3.3 Commande optimale

La commande optimale est donnée par :

$$\frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{B}^T \psi - \mathbf{u} = \mathbf{0}$$

D'où :

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{B}^T \psi = \mathbf{B}^T e^{-\mathbf{A}^T t} \psi_0$$

3.4 Intégration littérale des équations d'état

En portant la commande dans le système, on obtient :

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{B}\mathbf{B}^T e^{-\mathbf{A}^T t} \psi_0$$

La solution générale donnée dans l'énoncé s'écrit :

$$\mathbf{X}(t) = e^{\mathbf{A}t} \left[\mathbf{X}_0 + \left(\int_0^t e^{-\mathbf{A}\tau} \mathbf{B}\mathbf{B}^T e^{-\mathbf{A}^T \tau} d\tau \right) \psi_0 \right]$$

Posons

$$\mathbf{C}(t) = \int_0^t e^{-\mathbf{A}\tau} \mathbf{B}\mathbf{B}^T e^{-\mathbf{A}^T \tau} d\tau$$

avec par définition :

$$\mathbf{C}(0) = \mathbf{0}_{4 \times 4}$$

La solution générale s'écrit :

$$\mathbf{X}(t) = e^{\mathbf{A}t} (\mathbf{X}_0 + \mathbf{C}(t) \psi_0)$$

Remarque : La matrice \mathbf{C} est symétrique.

3.5 Résolution littérale du système au deux bouts

Si on désire que $\mathbf{X}(T) = \mathbf{0}$, il faut que :

$$\mathbf{X}_0 = -\mathbf{C}(T) \psi_0$$

soit :

$$\psi_0 = -\mathbf{C}(T)^{-1} \mathbf{X}_0$$

D'où la trajectoire optimale :

$$\mathbf{X}(t) = e^{\mathbf{A}t} (\mathbf{I} - \mathbf{C}(t)\mathbf{C}(T)^{-1}) \mathbf{X}_0$$

et la commande en boucle ouverte :

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{B}^T e^{-\mathbf{A}^T t} \mathbf{C}(T)^{-1} \mathbf{X}_0$$

3.6 Expression littérale de la commande en boucle fermée

La commande initiale s'écrit :

$$\mathbf{u}(0) = -\mathbf{B}^T \mathbf{C}^{-1}(T) \mathbf{X}(0)$$

et la commande en boucle fermée s'écrit :

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{B}^T \mathbf{C}^{-1}(T-t) \mathbf{X}(t)$$

Remarque 1 : Si on extrait \mathbf{X}_0 en fonction de $\mathbf{X}(t)$ dans $\mathbf{X}(t) = e^{At} (\mathbf{I} - \mathbf{C}(t) \mathbf{C}^{-1}(T)) \mathbf{X}_0$ et qu'on reporte sa valeur dans l'expression de la commande en boucle ouverte $\mathbf{u}(t) = -\mathbf{B}^T e^{-At} \mathbf{C}^{-1}(T) \mathbf{X}_0$, on obtient :

$$\mathbf{X}_0 = (\mathbf{I} - \mathbf{C}(t) \mathbf{C}^{-1}(T))^{-1} e^{-At} \mathbf{X}(t)$$

soit :

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{B}^T e^{-At} \mathbf{C}^{-1}(T) (\mathbf{I} - \mathbf{C}(t) \mathbf{C}^{-1}(T))^{-1} e^{-At} \mathbf{X}(t) = -\mathbf{B}^T \mathbf{C}^{-1}(T-t) \mathbf{X}(t)$$

On pourra vérifier que :

$$e^{-At} \mathbf{C}^{-1}(T) [\mathbf{I} - \mathbf{C}(t) \mathbf{C}^{-1}(T)]^{-1} e^{-At} = \mathbf{C}^{-1}(T-t)$$

simplification qui n'est pas évidente a priori. On voit tout l'intérêt de l'astuce du passage de la boucle ouverte à la boucle fermée par le calcul de $\mathbf{u}(0)$, puis par les substitutions $\mathbf{X}(0) \rightarrow \mathbf{X}(t)$, et $T \rightarrow T-t$.

Remarque 2 : On peut appliquer à la formule de liaison $\mathbf{X}_0 = -\mathbf{C}(T) \boldsymbol{\psi}_0$ entre $\mathbf{X}(t)$ et $\boldsymbol{\psi}(t)$ pour $t=0$ et l'horizon T , la même astuce que pour la commande en boucle fermée, en disant que cette formule est valable pour t quelconque, entre $\mathbf{X}(t)$ et $\boldsymbol{\psi}(t)$ et l'horizon correspondant (restant) qui vaut $T-t$, d'où la relation :

$$\mathbf{X}(t) = -\mathbf{C}(T-t) \boldsymbol{\psi}(t) \Rightarrow \boldsymbol{\psi}(t) = -\mathbf{C}^{-1}(T-t) \mathbf{X}(t)$$

qui montre que la matrice $\mathbf{P}(t)$ solution de l'équation de Riccati vaut :

$$\mathbf{P}(t) = -\mathbf{C}^{-1}(T-t)$$

3.7 Evaluation du revenu

Le revenu optimal s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(t) &= \frac{1}{2} \int_t^T \mathbf{u}^T \mathbf{u} dt \\ &= \frac{1}{2} \int_t^T \boldsymbol{\psi}_0^T e^{-At} \mathbf{B} \mathbf{B}^T e^{-At} \boldsymbol{\psi}_0 dt \\ &= \frac{1}{2} \boldsymbol{\psi}_0^T [\mathbf{C}(T) - \mathbf{C}(t)] \boldsymbol{\psi}_0 \\ &= -\frac{1}{2} \boldsymbol{\psi}_0^T \mathbf{X}_0 - \frac{1}{2} \boldsymbol{\psi}_0^T (e^{-At} \mathbf{X}(t) - \mathbf{X}_0) \\ &= -\frac{1}{2} \boldsymbol{\psi}^T(t) \mathbf{X}(t) \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{X}^T(t) \mathbf{C}^{-1}(T-t) \mathbf{X}(t) \end{aligned}$$

et en particulier :

$$\mathcal{C} = \mathcal{R}(0) = -\frac{1}{2} \boldsymbol{\psi}_0^T \mathbf{X}_0$$

Remarque : La relation $\mathcal{R}(t) = \frac{1}{2} \mathbf{X}^T \mathbf{C}^{-1}(T-t) \mathbf{X}$ fournit le revenu de la programmation dynamique $\mathcal{R}(\mathbf{X}, t)$ quadratique en \mathbf{X} . Dans l'établissement du principe du maximum à partir de la programmation dynamique, on pose $\boldsymbol{\psi} = -\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \mathbf{X}}$, soit ici : $\boldsymbol{\psi} = -\mathbf{C}^{-1}(T-t) \mathbf{X}$. On retrouve bien la relation entre $\boldsymbol{\psi}$ et \mathbf{X} citée en remarque 2 au paragraphe précédent.

4 Applications numériques

La consommation d'énergie est de 0.35384 pour les cas 1 et 2 et de 0.66524 pour les cas 3 et 4 (unités de calcul de \mathcal{E}).

D'après la question 3.7, le critère s'écrit $\mathcal{E} = -\frac{1}{2}\psi_0^T \mathbf{X}_0 = \frac{1}{2}\mathbf{X}_0^T \mathbf{C}(T)^{-1} \mathbf{X}_0$. Si $z(0) = \dot{z}(0) = \dot{x}(0) = 0$, alors $\mathcal{E} = \frac{1}{2}\mathbf{C}(T)^{-1}_{2,2}x_0^2 = kx_0^2$ avec :

$$k(1000)^2 = 0.35384 \rightarrow k = \frac{0.35384}{(1000)^2}$$

Si $\mathcal{E} = 1$ alors $l = |x(0)|_{max}$ est tel que :

$$kl^2 = 1 \rightarrow l = 1000\sqrt{\frac{1}{0.35384}} = 1681.1 \text{ m}$$

5 Listings des procédures Matlab

5.1 Résolution système aux deux bouts

Fichier symbol.m

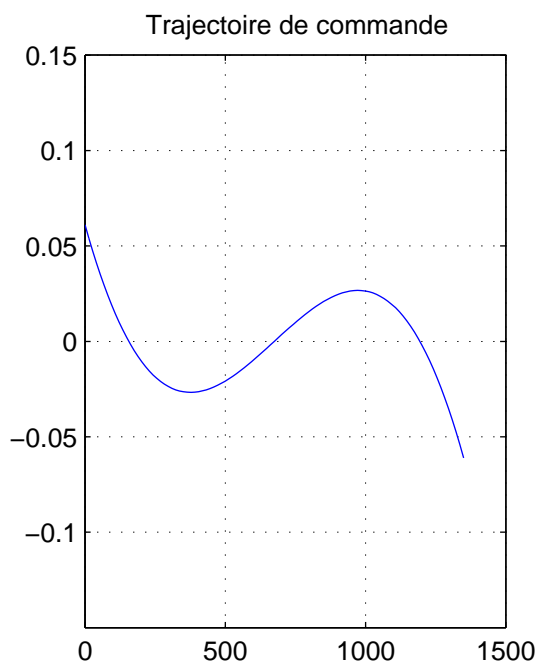
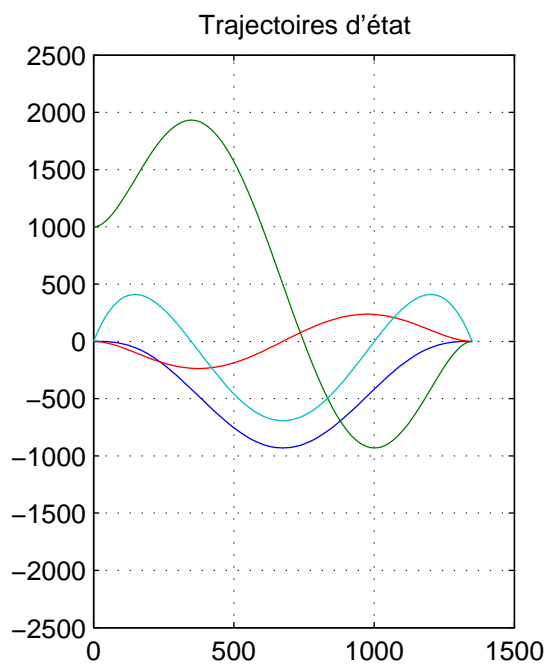
```
clear all
%
% CALCUL SYMBOLIQUE DES PRINCIPAUX ELEMENTS DE LA SOLUTION
%
syms w t T real
A=[0 0 1 0;0 0 0 1;3*w*w 0 0 -2*w; 0 0 2*w 0];
B = [0;0;0;1];
Ea_t = expm(A*t);
Ema_t = expm(-A*t);
D_t = Ema_t*B;
C_T = int(D_t*D_t',t,0,T);
C_t = subs(C_T,T,t);
%
% APPLICATION NUMERIQUE
%
Torb = 5400.;
% Substitution w par sa valeur
w = 2*pi/Torb ;
Ea_t = subs(Ea_t);
C_T = subs(C_T);
C_t = subs(C_t);
D_t = subs(D_t);
% Substitution T par sa valeur
T = Torb/4;
C_T = subs(C_T);
% Calcul P_0, X_t et U_t (boucle ouverte)
syms zo xo zpo xpo real
X_0 = [zo; xo; zpo; xpo];
% P_0 = -C_T\X_0;
% X_t = Ea_t*(X_0 + C_t*P_0);
% U_t = D_t'*P_0;
% Si on voulait le passage en boucle fermée :
% Ubo_0 = subs(U_t,t,0);
% Ubf_t = subs(Ubo_0,{T,z0,x0,zp0,xp0},{T-t,z,x,zp,xp});
%
% CALCUL NUMERIQUE DES TRAJECTOIRES
%
% Les 4 cas à traiter
xonum = [1000 -1000 0 0];
zonom = [0 0 1000 -1000];
xpo = 0;
zpo = 0;
Ninterval = 100; NPT = Ninterval + 1;
for kas = 1 : 4
    trajX = zeros(4,NPT);
    trajz = zeros(1,NPT);
    trajt = zeros(1,NPT);
    xo = xonum(kas);
    zo = zonom(kas);
    X0 = subs(X_0);
    P0 = -C_T\X0;
    X_t = Ea_t*(X0 + C_t*P0);
    U_t = D_t'*P0;
    Crit = -0.5*P0'*X0;
    for k = 1:NPT
        t_num = (k-1)*T/Ninterval;
```

```

trajt(k) = t_num;
traju(k) = double(subs(U_t,t,t_num));
trajX(:,k) = double(subs(X_t,t,t_num));
end
%
% TRACES DES COURBES
%
trajX(3,1:end) = trajX(3,1:end)*100.;
trajX(4,1:end) = trajX(4,1:end)*100.;
winplein = figure( 'Position', [ 300 100 640 600 ], ...
    'PaperType', 'a4letter', ...
    'PaperUnits', 'centimeters', ...
    'PaperPosition', [2 2 17 22] );
subplot(2,2,1); plot(trajt, trajX'); grid on; title('Trajectoires d''état'); axis([0 1500 -2500 2500]);
subplot(2,2,2); plot(trajt, traju); grid on; title('Trajectoire de commande'); axis([0 1500 -0.15 0.15]);
subplot(2,2,4); plot(trajX(1,:),trajX(2,:)); axis([-1000 1100 -2500 2500]); hold on;
plot([0 1400],[0 0]); plot(1300,0,'>'); text(1400,0,'Z');
plot([0 0],[0 1000]); plot(0,1000,'^'); text(0,1300,'X');
title('Trajectoire dans le plan de l''orbite')
xlabel('Déplacement radial'); ylabel('Déplacement tangentiel'); grid on
text(-4300, 1000,['Cas Xo = [ ' num2str([zonom(kas) xonom(kas) 0 0]) ']]);
text(-4300, -1000,['Crit = ' num2str(Crit)]);
end

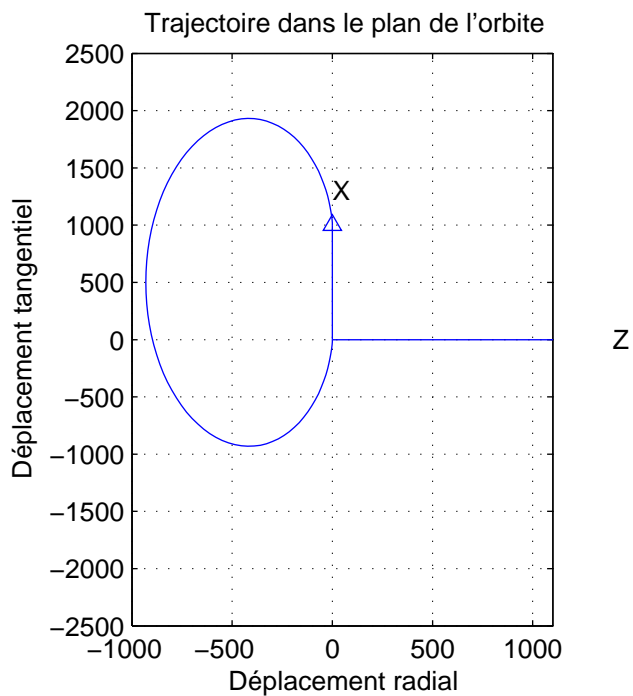
```

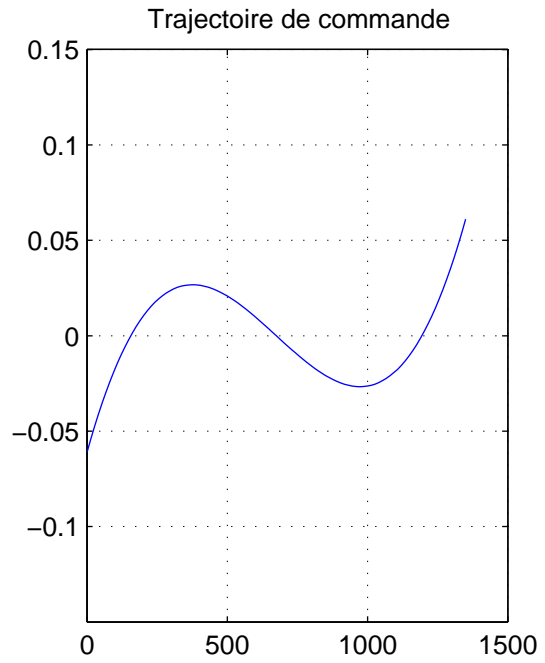
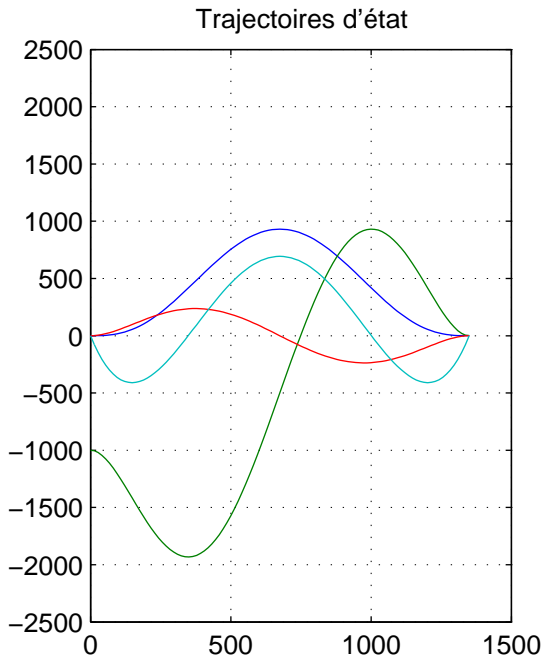
Tracés graphiques



Cas $X_0 = [0 \ 1000 \ 0 \ 0]$

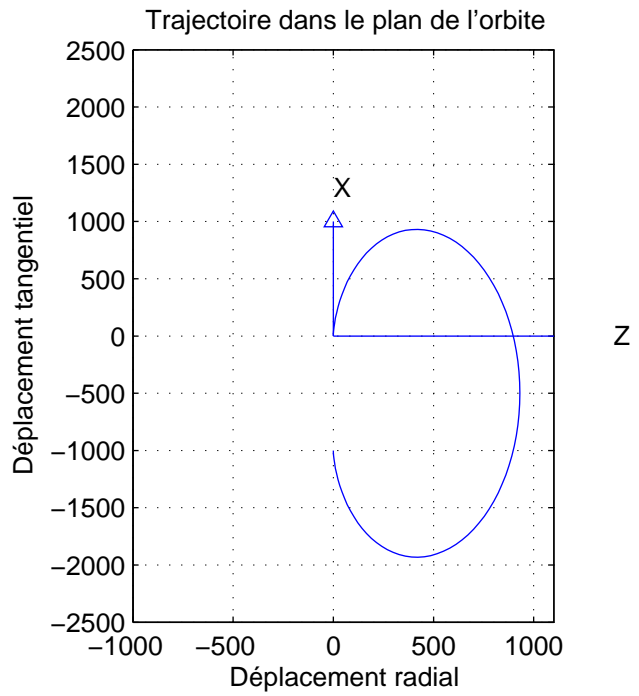
Crit = 0.35384

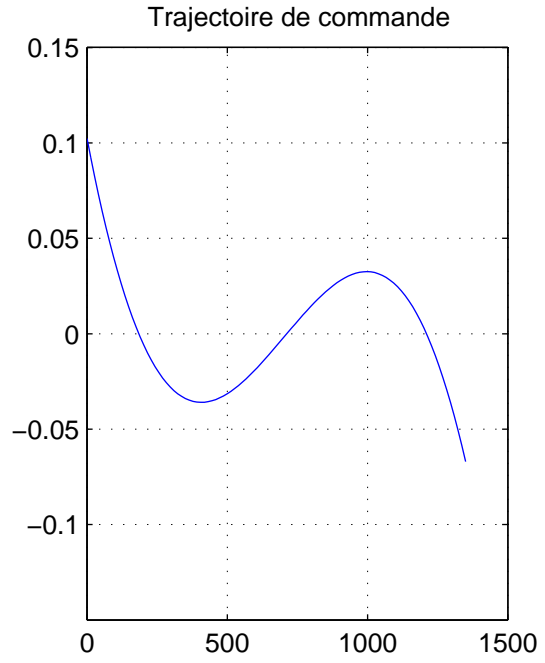
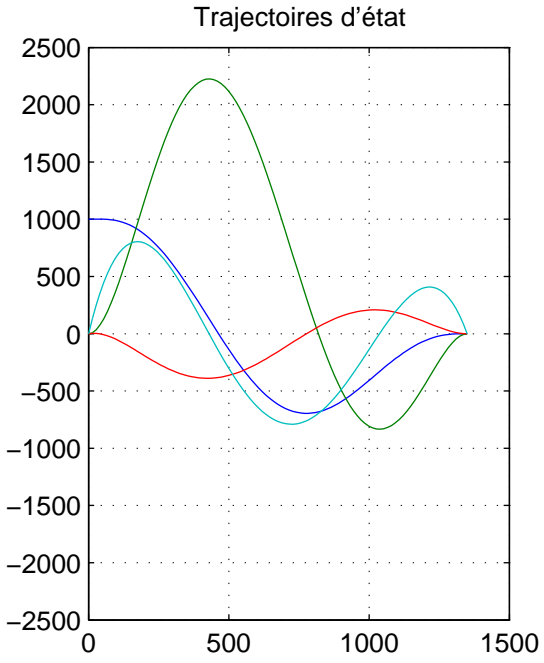




Cas $X_0 = [0 \ -1000 \ 0 \ 0]$

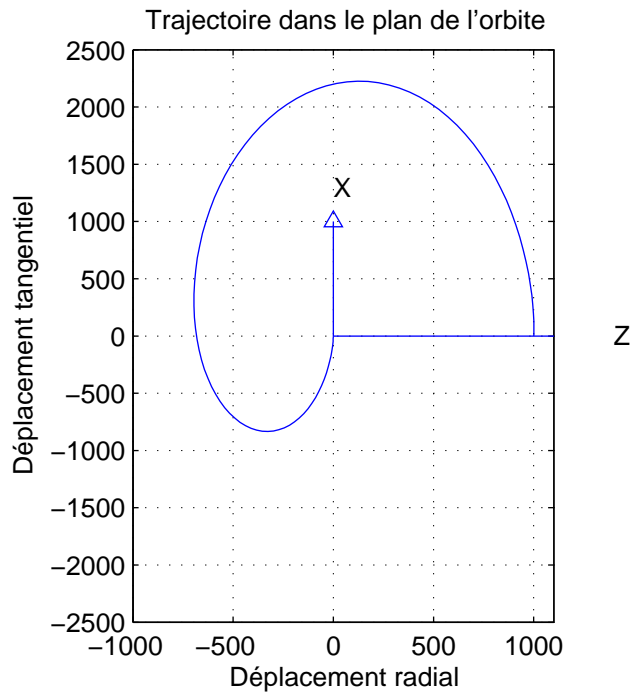
Crit = 0.35384

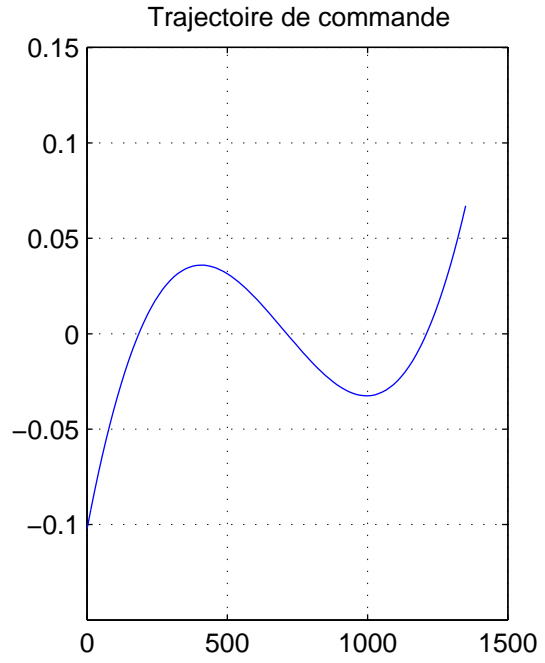
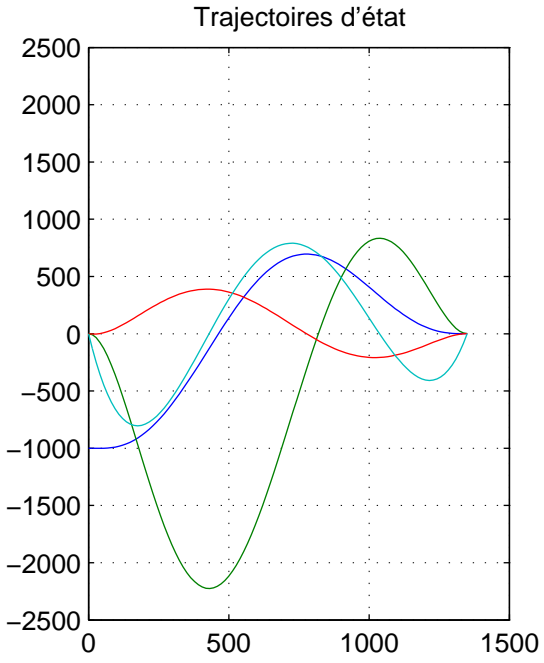




Cas $X_0 = [1000 \ 0 \ 0 \ 0]$

Crit = 0.66524





Cas $X_0 = [-1000 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$

Crit = 0.66524

