Etude d'une suspension à câbles

———-

L'ONERA étudie une suspension active pour des essais de maquette d'avion en soufflerie. La maquette est tenue par 9 câbles dont les tensions sont asservies par des moteurs électriques.

La figure montre deux configurations géométriques qui ont été étudiées.

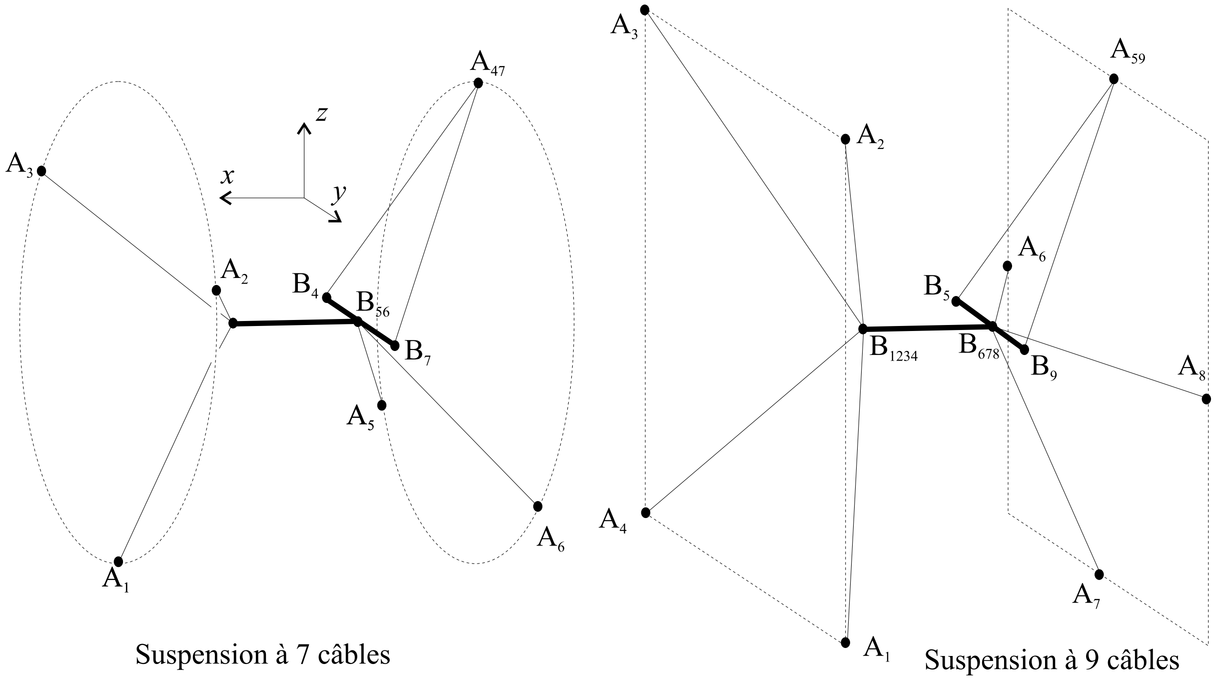

FIG. 1 – Les deux configurations de suspension

Dans le cadre de ce bureau d'étude, nous nous limiterons à l'analyse de la suspension à 7 câbles. La maquette est fixée à un support en forme de T dont la pointe avant est au voisinage du centre de gravité de la maquette et dont la barre du T est située à l'arrière de la maquette. Le fichiers `inidata1.m` donne les caractéristiques géométriques de la configuration à $n_q = 7$ câbles, avec en particulier les composantes dans le repère fixe $\mathcal{R}_A$ des points d'ancrages fixes A_i, et les composantes dans le repère maquette $\mathcal{R}_B$ des points d'ancrages B_i.

OUTILS D'ANALYSE DE LA SUSPENSION

1) Modèles géométrique et cinématique analytiques.

Le modèle géométrique analytique $\mathbf{q} = H(D_{AB})$ permet de calculer les longueurs des câbles $q_i = \|A_iB_i\|$ en fonction des éléments de la matrice de déplacement D_{AB} définie par

$$D_{AB} = \left(\begin{array}{c|c} C_{AB} & (AB)_A \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 & 1 \end{array}\right)$$

Les longueurs q_i sont obtenues par :

$$q_i = \|-(AA_i)_A + (AB)_A + C_{AB}\,(BB_i)_B\|$$

Le modèle cinématique permet de calculer les vitesses d'allongement des câbles $\dot{q}_i$ en fonction de la vitesse $\vec{V}$ de translation du point B et de la vitesse de rotation $\vec{\Omega}$ de la suspension. Pour exprimer ce modèle (pseudo-jacobienne du modèle géométrique), posons :

$$\vec{u}_i = \frac{1}{q_i}\overrightarrow{(A_iB_i)}$$

En observant que :

$$\dot{q}_i = \vec{u}_i \cdot \tfrac{d}{dt}\overrightarrow{(A_iB_i)}$$

et que :

$$\overrightarrow{\frac{d}{dt}\left(A_iB_i\right)} = \frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{A_iA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB_i}\right) = \vec{V} + \vec{\Omega} \times \overrightarrow{BB_i}$$

Il vient :

$$\dot{q}_i = \vec{u}_i \cdot \vec{V} + \vec{u}_i \cdot \left(\vec{\Omega} \times \overrightarrow{BB_i}\right) = \vec{u}_i \cdot \vec{V} + \left(\overrightarrow{BB_i} \times \vec{u}_i\right) \cdot \vec{\Omega}$$

D'où :

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{P}\begin{pmatrix} V \\ \Omega \end{pmatrix}$$

avec :

$$\mathbf{P}^T = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_{n_q} \\ \hline w_1 & w_2 & \cdots & w_{n_q} \end{pmatrix}$$

et :

$$\vec{w}_i = \overrightarrow{BB_i} \times \vec{u}_i$$

Pour analyser la suspension, écrire l'algorithme correspondant à la fonction suivante :
`function [Q, P] = Dab2QetP(Dab`
qui renvoie le vecteur $\mathbf{q}$ à n_q composantes et la matrice cinématique $\mathbf{P}$ de dimension $n_q \times 6$ en fonction de la situation D_{AB} du repère maquette $\mathcal{R}_B$ par rapport au repère fixe $\mathcal{R}_A$.

2) Calcul des tensions dans les câbles

Le modèle "statique" donne le torseur résultant en B de l'ensemble des forces de tensions $\vec{F}_i = -f_i\vec{u}_i$ des câbles. Posons :

$$F_X = \begin{pmatrix} F = \sum_{i=1}^{n_q} \vec{F}_i = -\sum_{i=1}^{n_q} f_i\vec{u}_i \\ M_B = \sum_{i=1}^{n_q} \overrightarrow{BB_i} \times \vec{F}_i = -\sum_{i=1}^{n_q} \overrightarrow{BB_i} \times f_i\vec{u}_i \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n_q} f_i\vec{u}_i \\ \sum_{i=1}^{n_q} f_i\vec{w}_i \end{pmatrix}$$

En notant $F_q^T = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & \ldots & f_{n_q} \end{pmatrix}$, il vient :

$$F_X = -\mathbf{P}^T F_q$$

Si $\Delta = \left|\mathbf{P}^T\mathbf{P}\right| \neq 0$, la solution de norme minimale de l'équation précédente est donnée par :

$$F_q = -\mathbf{P}\left(\mathbf{P}^T\mathbf{P}\right)^{-1} F_X$$

Cette solution F_q de norme minimale peut présenter des composantes f_i négatives (câbles détendus). Elle est alors inadmissible. Pour la rendre admissible, on ajoute à cette solution une quantité $\lambda\mathbf{n}$ telle que $\mathbf{P}^T\mathbf{n} = \mathbf{0}$ et telle que la composante la plus petite de $F_q$soit égale à $f_{\min}$ (valeur fournie dans les fichiers `inidata1.m`) :

$$F_q = -\mathbf{P}\left(\mathbf{P}^T\mathbf{P}\right)^{-1} F_X + \lambda\mathbf{n}$$

Dans le cas de la simple redondance ($n_q = 7 = 6 + 1$) en configuration régulière ($\left|\mathbf{P}^T\mathbf{P}\right| \neq 0$), $\mathbf{n}$ est de dimension 1. La macro Matlab `n=null(A)` fournit ce vecteur (matrice $n \times 1$). Si le vecteur $\mathbf{n}$ a toutes ses composantes de même signe (nous les choisirons positives dans ce cas), on voit qu'en ajoutant un $\lambda\mathbf{n}$ avec λ assez grand, on peut rendre n'importe qu'elle composante de F_q supérieure ou égale à $f_{\min}$. Pour rendre la plus petite composante du résultat égale à $f_{\min}$, on prendra :

$$\lambda = \max_i \left(\frac{f_{\min} - f_i}{n_i}\right)$$

Si le vecteur $\mathbf{n}$ n'a pas toutes ses composantes de même signe, cette méthode est inapplicable.

Pour analyser la suspension, écrire l'algorithme correspondant à la fonction suivante :
`function [Fq, Det, nmin] = DabetFx2Fq(Dab,Fx)`
qui fournit la solution de $F_X = -\mathbf{P}^T F_q$ telle que $\min(f_i) = f_{\min}$. Pour surveiller l'évolution des composantes de $\mathbf{n}$, la fonction renvoi `nmin` $= \min(n_i)$.

3) Inversion itérative du modèle $\mathbf{q} = H(D_{AB})$

Cette inversion se fait à l'aide d'une adaptation de l'algorithme de Newton-Raphson :
Initialisations :
$C_{AB} = D_{AB\_ini}(1:3, 1:3)$
$(\mathrm{AB})_A = D_{AB\_ini}(1:3, 4)$
$\Delta q_{moy}^{old} = \infty$, $I = 0$

1. Génération de la matrice D_{AB}, calcul de $\mathbf{q} = H(D_{AB})$, calcul de $\Delta\mathbf{q} = \mathbf{q}^{mes} - \mathbf{q}$.
2. Examen si convergence : $\Delta q_{moy} = \frac{1}{n_q} \|\Delta q\|$. Si $\Delta q_{moy} < \varepsilon$: Fin, solution trouvée.
3. Examen si divergence : Si $\Delta q_{moy} > \Delta q_{moy}^{old}$: Fin, divergence de l'algorithme.
4. Mémorisation : $\Delta q_{moy}^{old} = \Delta q_{moy}$
5. Calcul correction linéaire : $\begin{pmatrix} \Delta B \\ \Delta\mathcal{A} \end{pmatrix} = \left(\mathbf{P}^T\mathbf{P}\right)^{-1} \mathbf{P}^T \Delta\mathbf{q}$
6. Saturation homothétique des déplacemernts correctifs :
   $\Delta d_{\max} = \max\limits_n (|\Delta B \cdot e_n|)$; $\lambda = \Delta d_{\max}/\Delta d_{\lim}$. Si $\lambda > 1$, alors $\Delta B \leftarrow \frac{1}{\lambda}\Delta B$
   $\Delta r_{\max} = \max\limits_n (|\Delta\mathcal{A} \cdot e_n|)$; $\lambda = \Delta r_{\max}/\Delta r_{\lim}$. Si $\lambda > 1$, alors $\Delta\mathcal{A} \leftarrow \frac{1}{\lambda}\Delta\mathcal{A}$
   ($\vec{e}_n = \vec{i}_A$ ou $\vec{j}_A$ ou $\vec{k}_A$)
7. Calcul rotation corrective : $s^2 = \|\Delta\mathcal{A}\|^2$; $R = \mathbf{I}_{3\times3} + \widetilde{\Delta\mathcal{A}} + \frac{1-\sqrt{1-s^2}}{s^2}\widetilde{\Delta\mathcal{A}}^2$
8. Correction situation : $C_{AB} \leftarrow RC_{AB}$ et $(\mathrm{AB})_A \leftarrow (\mathrm{AB})_A + \Delta B$
9. $I \leftarrow I + 1$. Retour en 1 si I inférieur au nombre maximal d'itérations.

Pour analyser la suspension, écrire l'algorithme correspondant à la fonction suivante :
`function [Dab, iter] = Qmes2Dab(Qmes, itermax, Dab_ini)` : Cette fonction fournit la situation D_{AB} du repère maquette $\mathcal{R}_B$ par rapport au repère fixe $\mathcal{R}_A$ qui correspond à un vecteur `Qmes` $= \mathbf{q}^{mes}$ de longueur des câbles.

ANALYSE DE LA SUSPENSION

A l'aide des outils précédents :

1. En configuration origine $D_{AB} = \mathbf{I}_{4\times4}$
   - Donner la longueur des câbles,
   - Donner le déterminant de $\mathbf{P}^T\mathbf{P}$,
   - Donner la tension des câbles pour équilibrer le poids de la maquette (appliqué en B) : solution de norme minimale, puis solution dont la plus petite composante est égale à $f_{\min}$.
2. Rechercher la situation D_{AB} qui correspond au vecteur $\mathbf{q}^{mes}$ qui figure dans le fichier `inidata1.m`.
   - Donner $(\mathrm{AB})_A$ et les angles cap, assiette et roulis de la maquette,
   - Donner la longueur $\mathbf{q}$ des câbles pour la situation D_{AB} trouvée. Comparer à $\mathbf{q}^{mes}$.
   - Donner le déterminant de $\mathbf{P}^T\mathbf{P}$.
3. Etude du volume de travail
   - Tracer long de l'axe des x, l'évolution de det $\left(\mathbf{P}^T\mathbf{P}\right)$, $\min(n_i)$ et $\max(F_{qi})$ où F_q est le vecteur des tensions, à composante minimale égale à $f_{Q\min}$, qui équilibre le poids de la maquette. Ce tracé sera limité au domaine admissible (det $\left(\mathbf{P}^T\mathbf{P}\right) \neq 0$ et $\min(n_i) > 0$).
   - Idem le long de l'axe des y.
   - Idem le long de l'axe des z.
   - Donner les intervalles pour lesquels la tension maximale dans les brins est inférieure à la valeur $f_{Q\max}$.

Annexes

Fichier inidata1.m

```
% inidata1.m : Initialise les vecteurs globaux AAi et BBi
% position des points d'ancrages fixes et mobiles

global Nq AAi BBi Poids FqMin FqMax Qmes dLsat dAsat MyEps itermax
Poids = 5*9.81 ; % Maquette de 5 Kg
FqMin = 2*9.81 ; % Tension minimale des câbles 2 Kg
FqMax = 20*9.81 ; % Tension maximale des câbles 20 Kg
Largeur = 2;     % Largeur de la veine
R = 1;   % Rayon de la veine
LongT = 0.6 ;    % Longueur du T
LargT = 0.2 ;    % Largeur du T
dLsat = 0.1 ;    % Pas maximum autorisé en translation pour l'inversion itérative
dAsat = 0.1 ;    % Pas maximum autorisé en rotation pour l'inversion itérative
MyEps = 1.e-5 ;  % Précision désirée pour l'inversion de Q=H(Dab)
                 % utilisée également pour l'approximation R=1+Ã
itermax = 20;   % Nombre max d'itérations pour l'inversion

% Points d'ancrages fixes
Nq = 7 ;
dy = R*cos(pi/3);
dz = R*sin(pi/3);
AAi=zeros(3,Nq);
x=Largeur/2;
AAi(:,1)=[x;  0;-R];
AAi(:,2)=[x; dy;dz];
AAi(:,3)=[x;-dy;dz];
x=-Largeur/2;
AAi(:,4)=[x;  0;  R];
AAi(:,5)=[x;-dy;-dz];
AAi(:,6)=[x; dy;-dz];
AAi(:,7)= AAi(:,4);

% Points d'ancrages sur le T
BBi=zeros(3,Nq);
x=-LongT;
d= LargT/2.;
BBi(:,4)=[x;-d;0];
BBi(1,5)=x;
BBi(1,6)=x;
BBi(:,7)=[x;d;0];

% Position mesurée pour X, Y, Z, Psi, Theta, Phi ????
Qmes = [1.494992,1.255067,1.332363,0.926188,1.299455,1.244291,0.912307]';
```

Fichier Mat2Carol.m

```
% [Carol] = Mat2Carol(MatRot, Carol)
%
% Extraction des angles de Cap, assiette et Roulis (ordre ZYX)
% de la matrice MatRot
% Pour abs(assiette) > pi/2 - 1.E-5   conservation de la somme
% ou de la différence des valeurs passées en référence, qui
% sont également utilisées pour envoyer la solution dans la même
% nappe.
%
function [Carol] = Mat2Carol(a,Carol)

tet = -asin(a(3,1));
if abs(tet) < pi/2-1.e-7
   psi = atan2(a(2,1),a(1,1));
   phi = atan2(a(3,2),a(3,3));
else
   if tet > 0.
      som = Carol(1)+Carol(3);
      dif = atan2(-a(1,2),a(2,2));
   else
      dif = Carol(1)-Carol(3);
      som = atan2(-a(1,2),a(2,2));
   end
   psi = (som+dif)/2.;
   phi = (som-dif)/2.;
end
% On met dans la même nappe que la solution précédente
if abs(Carol(2)) > pi/2
   if psi < 0., psi = psi+pi; else psi = psi-pi; end
   if phi < 0., phi = phi+pi; else phi = phi-pi; end
   if tet > 0., tet = pi-tet; else tet =-pi-tet; end
end
Carol(1)=psi;
```

```
Carol(2)=tet;
Carol(3)=phi;
return
```

Fichier `manti.m`

```
% function M = manti(V)
% Matrice antisymétrique associée au vecteur V
function M = manti(V)
M=[ 0  -V(3) V(2);
   V(3)  0  -V(1);
  -V(2) V(1)  0  ];
return;
```