Pythagore et l'équation du deuxième degré

Table des matières

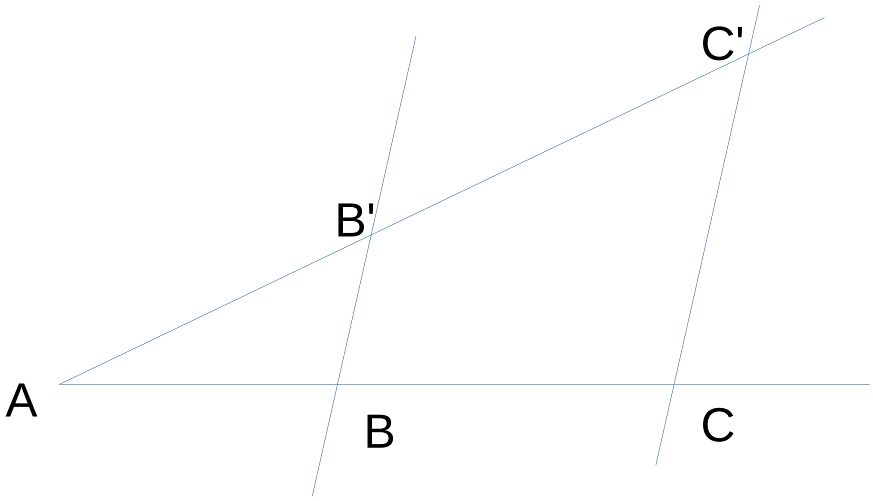
1 Introduction

Pythagore a vécu en Grèce au 6ème siècle avant J.-C. (-580 à -495). Cet immense philosophe et mathématicien n'aurait pas laissé d'écrits et ses travaux, dont le fameux *théorème de Pythagore* nous seraient parvenus à travers les écrits de ses successeurs.

Ce document présente quelques digressions géométriques autour du théorème de Pythagore et en particulier son utilisation pour résoudre géométriquement l'équation du second degré. Il commence par la présentation d'un cheminent qui a peut-être conduit à sa démonstration.

2 Construction géométrique des multiplications et divisions

Avant Pythagore, il a eu Thalès (-625, -548 environ) qui a posé les fondements des proportionnalités en géométrie. La similitude et les constructions avec des parallèles permettaient de faire des multiplications et des divisions :



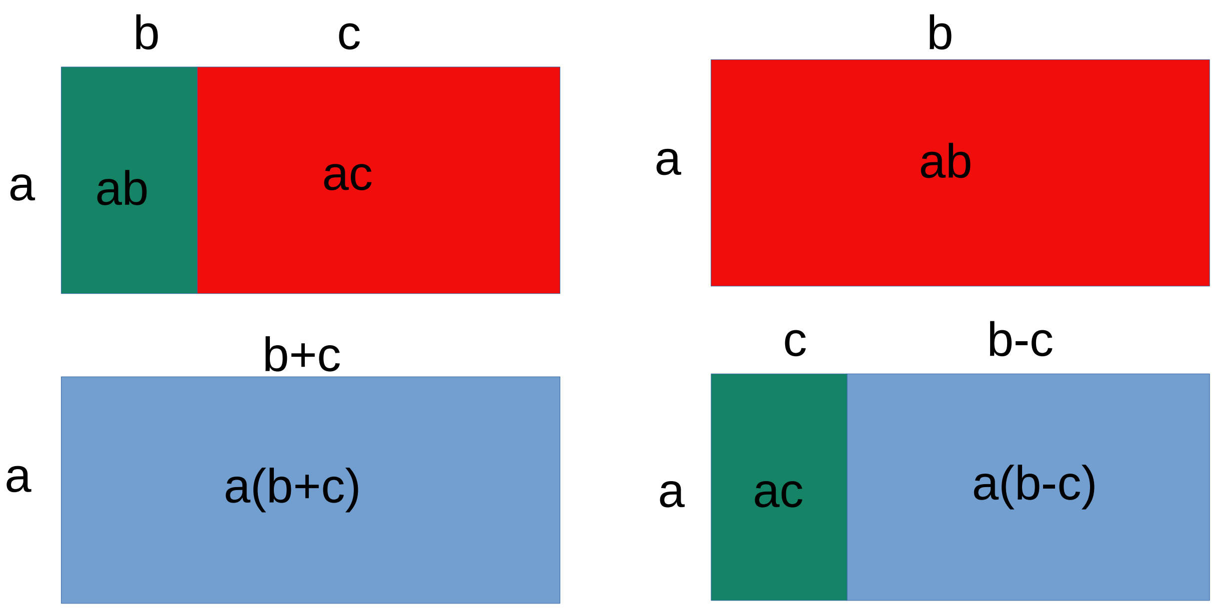
La relation $\frac{AB'}{AB}=\frac{AC'}{AC}$ peut être utilisée pour faire une multiplication :

On veut multiplier *m* par *n*. On prend AB de longueur 1, AC de longueur *m* et AB' de longueur *n*.
On a alors $AC'=\frac{AB'.AC}{AB}=m\times n$

On veut diviser m par n. On prend AB de longueur 1, AC de longueur *n* et AC' de longueur *m*. On a alors $AB'=\frac{AB.AC'}{AC}=\frac{m}{n}$

3 Distributivité

Depuis 4 à 5 millénaires on sait calculer l'aire d'un rectangle par le produit des longueurs de ses deux cotés.



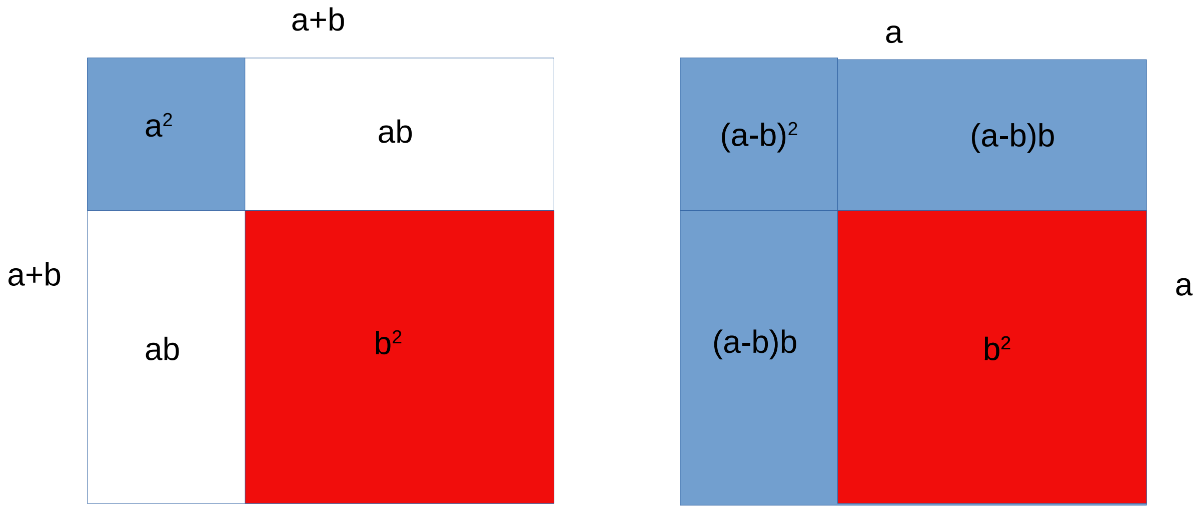
La distributivité de la multiplication par rapport à l'addition (ou la soustraction) était connue de Pythagore.

A gauche la surface $a(b+c)$ du rectangle bleu en bas est bien égale à la somme $ab+ac$ des rectangles vert et rouge en haut, d'où $a(b+c)=ab+ac$.

A droite la surface $a(b-c)$ du rectangle bleu en bas est bien égale à la différence $ab-ac$ des rectangles rouge en haut et vert en bas, d'où $a(b-c)=ab-ac$.

4 Identité remarquables

Les identités remarquables $(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$ et $(a-b)^2=a^2+b^2-2bc$ faisaient déjà partie de l'algèbre babylonienne. Elles s'établissent facilement à partir des figures géométriques tracées ci-dessous.

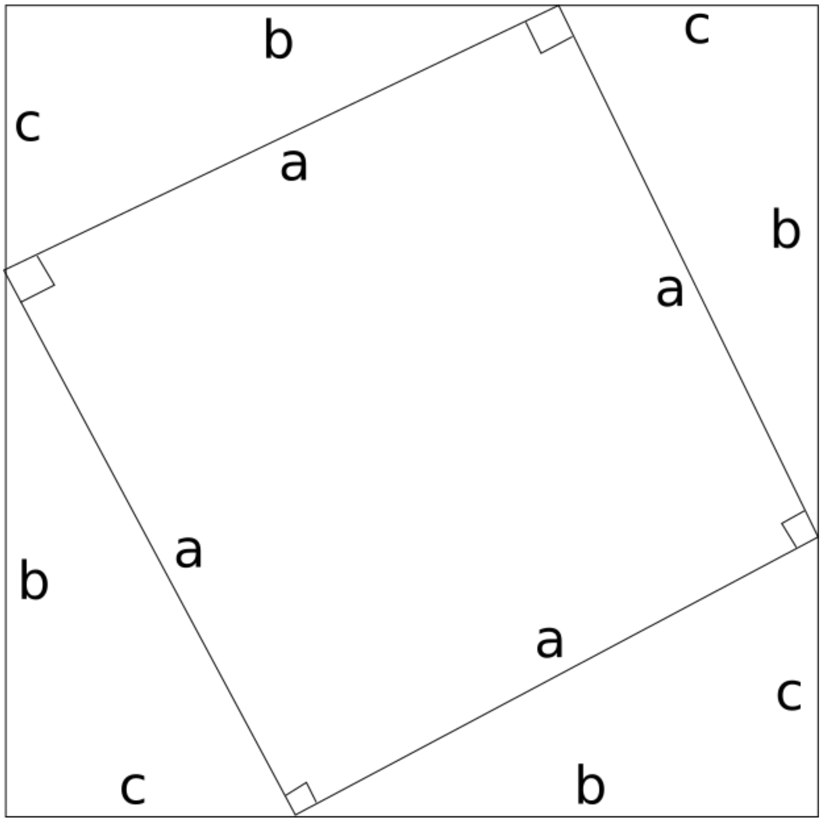


Celle de gauche rend évidente la première identité $(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$

Celle de droite montre que Ensuite il faut faire intervenir la distributivité de la multiplication par rapport à la soustraction pour en déduire que puis en déduire que $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$

5 Le théorème de Pythagore

Il semble que le théorème de Pythagore était déjà connu des égyptiens et mésopotamiens depuis environ mille ans qui s'en servaient pour construire des angles droits. Mais Pythagore en a fait un instrument général pour les calculs mathématiques.



Considérons le carré de coté $b+c$ ci-avant. En écrivant que l'aire $(b+c)^2$ du grand carré est égale à la somme des aires de 4 triangles rectangles (4 fois $bc/2$) et du carré intérieur a^2, on obtient :

$$b^2+c^2+2bc=4bc/2+a^2$$

c'est-à-dire :

$$a^2=b^2+c^2$$

Ce calcul suppose que le quadrilatère de coté *a* était un carré. Montrons comment ce résultat était connu de Pythagore (-580,-495), grâce aux travaux de Thalès (vers -622, -546).

Dans la figure ci-dessous, montrons que l'angle 10 est droit.

Par construction les points ACF sont alignés et les triangles ABC et FCE sont strictement égaux.

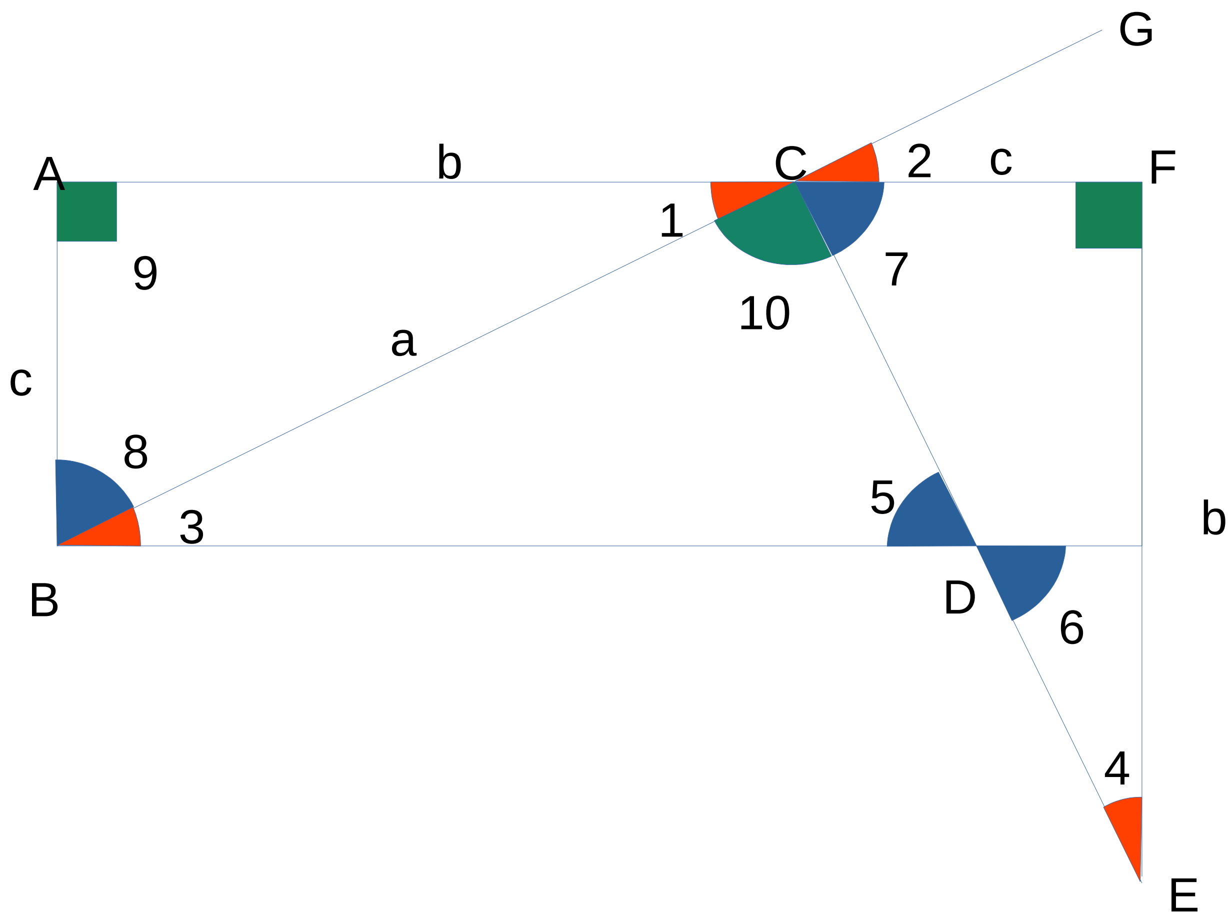
L'angle (8) est donc égal à l'angle (7).

Par construction BD est parallèle à ACF. Les angles alternes-internes (1) et (3) sont donc égaux. Cela s'établit en constatant que (1) et (2) opposés sont superposables et que (2) et (3) sont également superposables.

Les angles alternes-internes (5) et (7) sont égaux : (5) et (6) opposés, et (6) et (7) superposables..

Or (7) est égal à (8). Donc (8) est égal à (5).

Le triangle CDB qui a ses angles à la base (5) et (3) égaux aux angles à la base (8) et (1) du triangle ABC lui est donc semblable. Il en résulte que l'angle (10) est égal à l'angle (9).



L'angle (10) est donc droit.

6 Somme des angles d'un triangle

Sans utiliser le fait que (10) est droit, et indépendamment de ce fait, comme la somme des angles (1), (10) et (7) vaut celle d'un angle plat (180°), il en résulte que la somme des angles d'un triangle quelconque (1, 8 et 9) vaut un angle plat ou vaut deux droits, comme l'énonce un autre théorème également dû à Pythagore.

On voit aussi que l'angle externe d'un sommet est égal à la somme des angles à la base, par exemple dans le triangle CBD, l'angle externe en C (2)+(7) est bien égal à (3) + (5).

7 Triplets Pythagoriciens

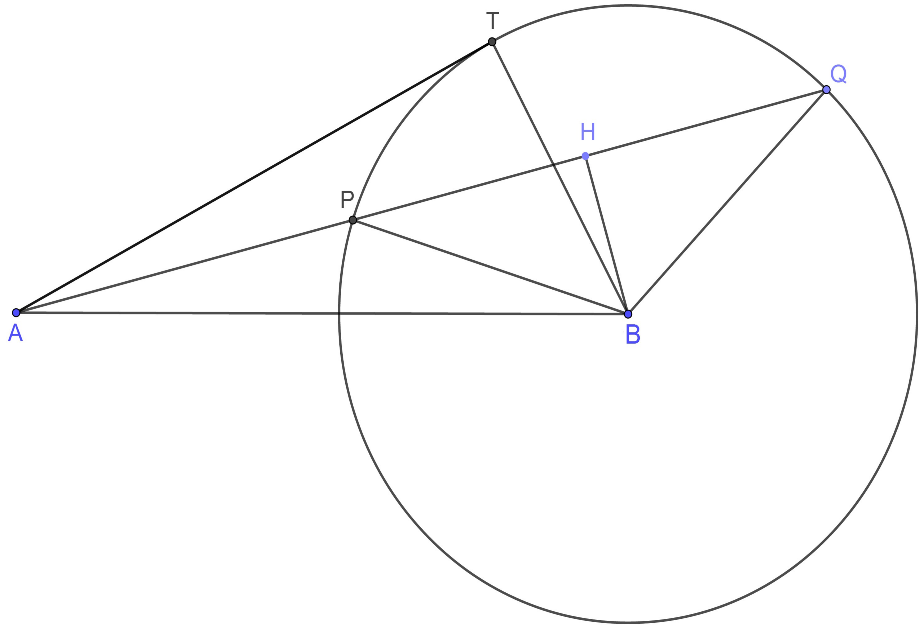
Les triplets pythagoriciens sont trois nombres entiers tels que 3, 4 et 5 qui obéissent à la relation $3^2+4^2=5^2$. Ils sont connus au moins depuis -1800. La tablette babylonienne Plimpton 322, qui date de cette époque, en comporte quinze.

Étant donné 2 nombres consécutifs *n* et *n+1*, une famille de triplets pythagoriciens qu'aurait trouvée Pythagore lui-même (d'après *Les Éléments* d'Euclide) est formée par :

- leur somme : $n+n+1 = 2n+1$
- le double de leur produit : $2n(n+1)$
- ce dernier nombre +1 : $2n(n+1) + 1$

Exemple 5, et 6 +> $11^2+60^2=61^2$

8 Puissance d'un point par rapport à un cercle



Considérons un cercle de centre B et de rayon r. AT tangente au cercle en T. Point H milieu de PQ. En appliquant le théorème de Pythagore dans les triangles rectangles, on obtient :

$$AB^2 = AT^2 + r^2$$

$$AH^2 + HB^2 = AB^2$$

$$r^2 = PH^2 + HB^2$$

En additionnant :

$$AH^2 = AT^2 + PH^2$$

D'où :

$$AH^2 - PH^2 = AT^2 \qquad (1)$$

soit

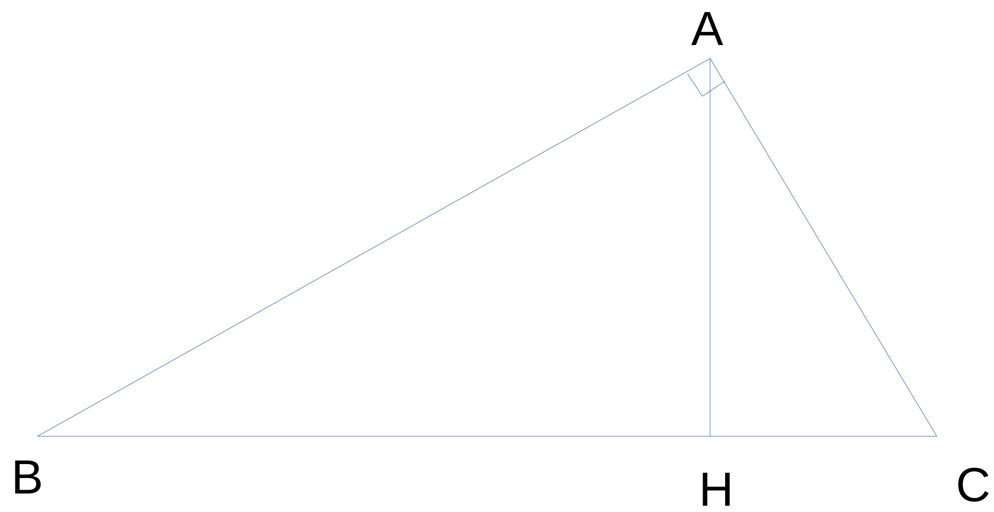
$$(AH - PH)(AH + PH) = AP \,.\, AQ = AT^2$$

qui fournit la relation classique de la puissance du point A par rapport au cercle.

$$\boxed{\overline{AP} \,.\, \overline{AQ} = AT^2}$$

Remarquons que si AP a pour longueur l'unité, cette relation permet de calculer au moyen de la mesure de la longueur AT la racine carrée de la longueur AQ C'est une relation voisine que nous utilisons ci-après pour calculer géométriquement une racine carrée.

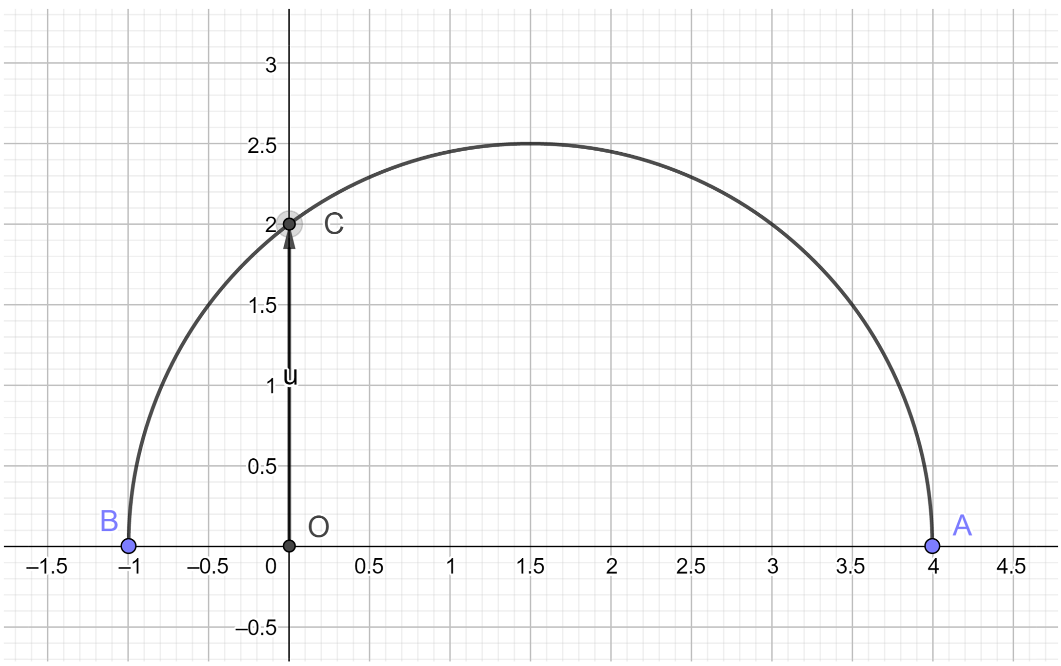
9 Calcul géométrique d'une racine carrée



Le théorème de la hauteur relative à l’hypoténuse d'un triangle rectangle figure dans l'ouvrage d'Euclide. Les angles $\widehat{ABH}$ et $\widehat{CAH}$ sont égaux comme angles à cotés perpendiculaires. Il en résulte que les triangles ABH et CAH sont semblables, ce qui implique que :

$$\frac{AH}{HB}=\frac{HC}{AH} \quad \Rightarrow \quad AH^2=HB.HC$$

Cette relation est utilisée par Descartes pour calculer la racine carrée d'un nombre à l'aide de la construction suivante :



Soit à calculer $\sqrt{a}$. On porte sur un axe la longueur $OA=a$ et de l'autre coté une longueur unité $OB=1$. On trace le demi-cercle de diamètre AB de longueur $a+1.$ Il coupe la hauteur issue de O en C tel que $OC^2=a\times 1=a$ d'où $OC=\sqrt{a}$

Si *a* est très grand, on peut considérer 2 entier successifs b-1 et b tels que $b^2 < a < (b+1)^2$ et prendre comme longueur $OB = b^2$. Alors $OC^2 = b^2 . a \Rightarrow \sqrt{a} = \frac{OC}{b}$.

Pour diviser plus facilement, on peut, diviser *a* par 2, puis le résultat par 2... un nombre pair de fois ce qu'on peut faire avec des médiatrices. On va diviser *a* par 2^{2n} avec *n* tel que $2^{2n} < a < 2^{2(n+1)}$. Par exemple pour $a = 300$ on prendra $n = 4$ tel que $256 < 300 < 1024$. Il faut diviser 2 fois de suite le segment pour compter pour chaque unité de *n*. On trace ensuite la racine carrée de $\frac{a}{2^{2n}}$ qui dans l'exemple serait un segment de longueur $\frac{300}{256} = 1.17$. On obtiendra un segment OC de longueur environ 1,08 qui multiplié par 2^n , c'est-à-dire 8 donnera la valeur de 17,3.

Dans la méthode par division de deux entiers successifs, on considère b = 17 car $17 \times 17 = 289 < 300 < 324 = 18 \times 18$.

Remarque : Ce calcul de la racine carrée est un des premiers calculs qui met en exergue le rôle joué par l'unité par rapport à la grandeur des paramètres étudiés. On a perdu ce problème de vu car avec notre système métrique basé sur le système décimal, on peut considérer des unités dix, cent, mille... fois plus grandes ou plus petites. Dans le cas de la racine carrée, on déplace la virgule de 2 positions en 2 positions pour ramener le nombre considéré dans un domaine plus pratique.

Calcul par approximation successives :

Abandonnons momentanément la géométrie pour l'algèbre.

Pour calculer $\sqrt{a}$ les babyloniens utilisaient déjà la méthode récurrente suivante :

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$$

qu'on initialise avec x_0 entier tel que x_0^2 soit proche de *a*. Par exemple pour $a = 2$, on peut initialiser avec $x_0 = 1$ ou $x_0 = 2$ puisque $1^2 < 2 < 2^2$. Avec $x_0 = 1$ on obtient la séquence suivante :

$$\begin{gathered} x_0 = 1 \\ x_1 = 1.5 \\ x_2 = 1.416666 \\ x_3 = 1.414215 \\ x_4 = 1.414213 \end{gathered}$$

Une tablette babylonienne (YBC 7289) fournit la valeur suivante : $\sqrt{2} = 1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3}$ soit 1.414213

10 Résolution géométrique de l'équation du second degré

La relation () s'écrit :

$$PH^2 = AH^2 - AT^2$$

soit

$$PH^2 = AH^2 - AP.\,AQ \tag{2}$$

Posons

$$x_1 = AP = AH - PH$$
$$x_2 = AQ = AH + PH.$$

Leur somme et leur produit est donné par :

$$x_1 + x_2 \;=\; s \;=\; 2\,AH$$
$$x_1 x_2 \;=\; p \;=\; AP.\,AQ$$

La relation () permet d'écrire :

$$PH^2 = \left(\frac{s}{2}\right)^2 - p$$

soit :

$$PH = \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 - p}$$

qui permet d'écrire :

$$x_1 = AH - PH = \frac{s}{2} - \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 - p} \quad \text{et} \quad x_2 = AH + PH = \frac{s}{2} + \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 - p}$$

Or l'équation $(x - x_1)(x - x_2) = 0$ s'écrit également $x^2 - (x_1 + x_2)x = x_1 x_2 = 0$, c'est-à-dire $x^2 - sx + p = 0$. cette équation du second degré à donc pour racines:

$$x_{1,2} \;=\; \frac{s}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 - p}$$

Plus généralement, en multipliant cette équation par a et en posant $b = -a.s$ et $c = a.\,p$ l''équation du deuxième degré $ax^2 + bx + c = 0$ a pour racines :

$$x_{1,2} = -\;\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}}$$

que l'on met traditionnellement sous la forme :

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4\,ac}}{2\,a}$$

Approche algébrique

Cette approche géométrique semble toutefois plus complexe que l'approche algébrique basée sur l'identité remarquable $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2\,ab$. Ainsi l'équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$

peut être mise sous la forme $a(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a})=0$, puis on fait apparaître un carré parfait en ajoutant et retranchant $\frac{b^2}{4a^2}$:

$$a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right)=a\left((x+\frac{b}{2a})^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right)=0$$

d'où :

$$x-\frac{b}{2a}\pm\sqrt{(\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a})}$$

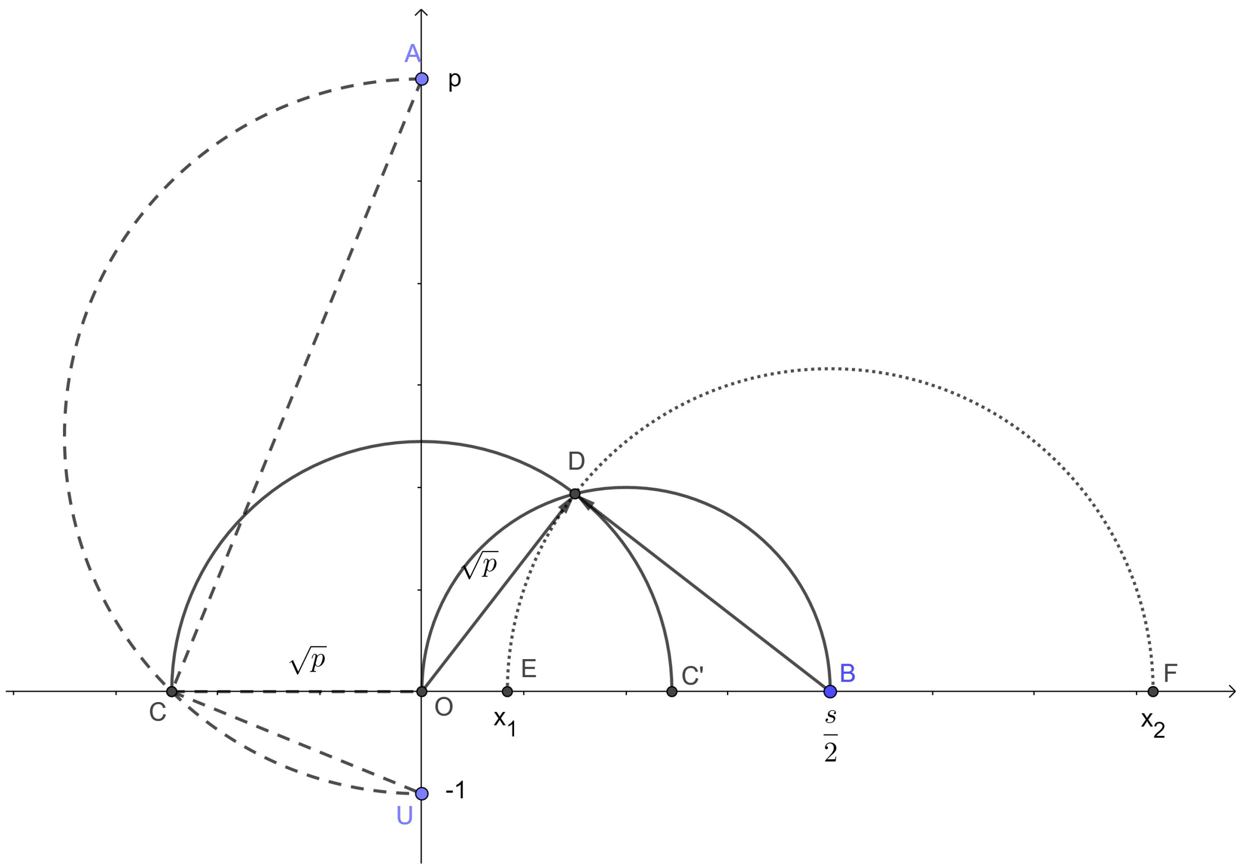
Les babyloniens savaient résoudre numériquement (en base 60) les équations du second degré à coefficients rationnels lorsque le radical figurait dans leurs tables des racines carrées.

11 Construction géométrique de la solution de l'équation du second degré

Étant donnée une équation du deuxième degré $ax^2+bx+c=0$, on pose $s=-\frac{b}{a}$ pour la somme des racines et $p=\frac{c}{a}$ pour le produit.

11.1 Cas produit positif

Considérons le cas où p est positif.



Sur la figure d'origine O on commence par construire un segment de longueur $\sqrt{p}$ Pour cela on utilise la construction de la racine carrée sur l'axe des *y*.

Ensuite on porte sur l'axe des *x* un point B d'abscisse $\frac{s}{2}$ et on trace un demi-cercle de diamètre OB.

On trace un cercle de centre O et de rayon $\sqrt{p}$ qui coupe le cercle de diamètre AB en D.

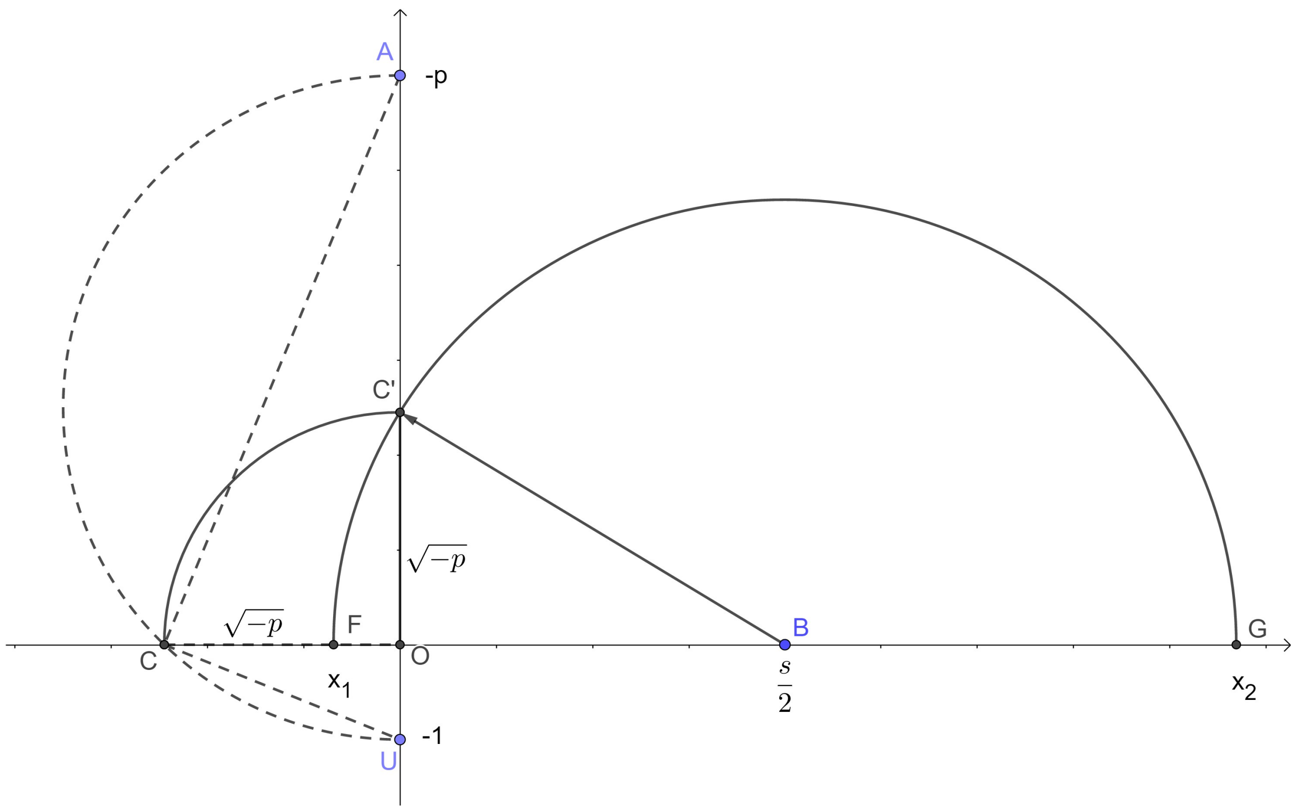
D étant sur le cercle de diamètre OB, l'angle $\widehat{ODB}$ est droit. Si on trace le cercle de centre B passant par D, il coupe l'axe des x en deux points E et F d'abscisses et tels que car OD étant tangent à ce cercle on a OE.OF = OD2. De plus $\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{s}{2}$

x_1 et x_2 sont donc les racines recherchées. A titre de vérification : Le théorème de Pythagore fournit bien $BD=\sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2-(\sqrt{p})^2}$ c'est-à-dire le radical de l'équation du second degré.

Si $\sqrt{p} > \frac{s}{2}$ le cercle de centre O et de rayon $\sqrt{p}$ ne coupe pas le demi-cercle de diamètre OB. il n'y a pas de solution. Pour qu'il y ait une solution, il faut donc que $p\leq\left(\frac{s}{2}\right)^2\Rightarrow b^2-4ac\geq 0$.

11.2 Cas produit négatif

Dans le cas où p est négatif , il y a toujours une solution puisque le discriminant est positif. La construction est légèrement différente.



La construction de la longueur $\sqrt{-p}$ est identique.

Considérons le segment BC'. Le carré de sa longueur est bien égal au discriminant :

$$BC'^2 = \left(\frac{s}{2}\right)^2 + (-p)$$

Les solutions sont donc à l'intersection avec l'axe des abscisses et du cercle de centre B et de rayon BC'. On voit qu'elles existent toujours et sont forcément de signes opposés.