Les mathématiques du mécanisme d'Anticythère

Table des matières

1 Introduction

La machine d'Anticythère est un mécanisme à engrenages datant de l'antiquité grecque trouvé en 1901 dans l'épave d'une galère romaine. C'est un mécanisme astronomique extrêmement perfectionné qui permettait de prévoir les dates des éclipses. Sa conception a demandé une grande maîtrise technologique dans la réalisation des engrenages et de sérieuses connaissances mathématiques que nous présentons dans ce document.
Le problème mathématique qu'ont du résoudre les concepteurs de cette machine a été de trouver la meilleure approximation qui soit pour des rapport de durées non entières (par exemple celle des mois synodiques et draconiques) à l'aide de rapports de nombres entiers aussi petits que possible car ces nombres sont ceux des dents des engrenages. Les concepteurs se sont appuyés sur les travaux d'Euclide : algorithme de recherche du plus grand commun diviseur, de Diophante d'Alexandrie : approximation diophantienne des nombres irrationnels dont l'existence a été révélée au monde par Hippase de Métaponte, élève de Pythagore.

2 Algorithme d'Euclide

L'algorithme d'Euclide recherche le PGCD de deux entiers a et b, avec $a > b$
La division entière de a par b s'écrit :

$$a = b q + r \; avec \; r < b$$

q est le quotient et r le reste.
En remarquant que le PGCD de a et b était le même que celui de (a-b) et b, car s'il divise a et b, il divise aussi a-b, on remplace le couple a, b par le couple de nombres plus petits (a-b), b.
L'algorithme d'Euclide accélère ce processus en retranchant à a, q fois b ce qui revient à remplacer le couple (a,b) par le couple (b,r).
Notons r = rem(a,b) et utilisons la relation :

$$\text{pgcd}(a,b) = \text{pgcd}(b, \text{rem}(a,b))$$

itérativement jusqu'à ce que le reste soit nul. Le dernier diviseur non nul est le pgcd.
Exemple 88 = 8x11 et 56=8x7

a	b	q	r
88	56	1	32
56	32	1	24
32	24	1	8
24	8	3	0

Remarque : Dans le calcul du PGCD, le quotient n'est pas exploité.

3 Fractions continues

Utilisons le tableau précédent pour développer le rapport 88/56. En utilisant la première ligne on peut écrire :

$$\frac{88}{56}=1+\frac{32}{56}=1+\frac{1}{\frac{56}{32}}$$

En utilisant la deuxième ligne, on écrit :

$$\frac{88}{56}=1+\frac{1}{1+\frac{24}{32}}=1+\frac{1}{1+\frac{1}{\frac{32}{24}}}$$

En utilisant la suivante :

$$\frac{88}{56}=1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{8}{24}}}=1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{\frac{24}{8}}}}$$

et finalement :

$$\frac{88}{56}=1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{3}}}$$

ce qui s'écrit avec la notation des fractions continues :

$$\frac{88}{56}=[1,1,1,3]$$

Ce qui donne les approximations suivantes pour 1.571428... (88/56)

1, erreur 0.574

$1+\frac{1}{1}=2$, erreur -0.469

$1+\frac{1}{1+\frac{1}{1}}=\frac{3}{2}$ erreur 0.0714

$1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{3}}}=\frac{11}{7}$ erreur 0.

La notation $[a_0, a_1, a_2, a_{3...}, a_n]$ représente

$$[a_0, a_1, a_2, a_3, ...]=a_0+\frac{1}{a_1+\frac{1}{a_2+\frac{1}{a_3+...}}}$$

L'algorithme d'Euclide permet de décomposer un nombre rationnel a/b en fraction continue, comme on l'a vu précédemment.

Pour formaliser la récurrence on pose :

$a = p_0$, $b = p_1$, $q = a_0$ et $r = p_2$. Ainsi devient :

$$p_0=a_0 p_1+p_2 \quad \text{avec } a_0 \text{ entier positif et } p_2 < p_1.$$

puis on applique la relation de récurrence :

$$p_{j-1}=a_{j-1}p_j+p_{j+1}$$

tant que p_j est non nul. Elle définit le quotient a_{j-1} et le reste p_{j+1} .
Le dernier a_n est obtenu lorsque $p_{n+2}=0$. Il est tel que $p_n/p_{n+1}=a_n=[a_n]$
Il en résulte que $p_j/p_{j+1}=[a_j,p_{j+1}/p_{j+2}]=[a_j,a_{j+1},\ldots,a_n]$ et finalement :

$$\frac{p_0}{p_1}=[a_0,a_1,\ldots,a_n]$$

4 Réduites et approximations d'un nombre irrationnel

Soit un nombre µ quelconque, a priori irrationnel. On applique la même procédure en posant : p_0 = µ et p_1 = 1. On cherche a_0 et p_2 tels que :

$$p_0=a_0p_1+p_2 \quad \text{avec } a_0 \text{ entier positif et } p_2 < p_1$$

mais maintenant les p_j sont des réels. La relation de récurrence :

$$p_{j-1}=a_{j-1}p_j+p_{j+1}$$

ne s'arrêtera pas si µ est un vrai réel.
Exemple pour π :

$$\pi=3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{292=0.6}}}}$$

qui donne l'approximation :
$\pi=[3,7,15,1,292,\ldots]$
On appelle *réduite* de cette fraction continue infinie le rapport :

$$\frac{h_p}{k_p}=[a_0,a_1,\ldots,a_p]$$

On a bien évidemment $\frac{h_0}{k_0}=a_0$ c'est-à-dire $h_0=a_0$ et $k_0=1$ et $\frac{h_1}{k_1}=a_0+\frac{1}{a_1}=\frac{a_0a_1+1}{a_1}$ c'est-à-dire $h_1=a_0a_1+1$ et $k_1=a_1$, etc...
La fraction h_p/k_p est une ***approximation diophantienne*** du nombre irrationnel µ. Elle est nommée ainsi car ce genre de problème avec une équation à variables sur l'ensemble des nombres rationnels a fait l'objet de nombreuses études par **Diophante d'Alexandrie** (époque inconnue autour de J.-C.).
Les relations de récurrence suivantes permettent de calculer ces réduites :

$$h_n=a_nh_{n-1}+h_{n-2}$$
$$k_n=a_nk_{n-1}+k_{n-2}$$

on les initialise avec $h_0=a_0$, $k_0=1$ et $h_{-1}=1$ et $k_{-1}=0$, et on applique la récurrence de n=1 à p, ou jusqu'à ce qu'on ait atteint la précision désirée.
On peut également utiliser l'initialisation $h_{-2}=0$ et $k_{-1}=1$ qui permet d'appliquer la récurrence de n=0 à p.
Précision :
On montre (je n'ai pas vérifié) que la différence de deux réduites successives est donnée par :

$$\frac{h_{p+1}}{k_{p+1}}-\frac{h_k}{p_k}=\frac{(-1)^p}{k_pk_{p+1}}$$

ce qui permet d'affirmer que $|\mu-\frac{h_p}{k_p}|<\frac{1}{k_pk_{p+1}}$. On a ainsi une borne de l'erreur que l'on fait en limitant le réduite à l'ordre p.

Exemple :

$\pi=[3,7,15,1,292,...]$

n	a_n	h_n	k_n	h_n/k_n	$1/k_nk_{n+1}$
-2	-	0	1	-	-
-1	-	1	0	-	-
0	3	3	1	3	1/7
1	7	22	7	3.1428	1/742
2	15	333	106	3.141509	1/11978
3	1	355	113	3.14159292	1/430326
4	292	103993	33102	3.1415926530	-

On voit tout l'intérêt des approximations 22/7 à moins de 1/742 près et 355/113 à moins de 1/430000 près. L'approximation 333/106 est moins intéressante car elle manipule des nombres du même ordre de grandeur que 355/113 avec une précision bien inférieure. L'approximation suivante 103993/33102 manipule des nombres trop grands, mais elle offre 9 décimales exactes.

Cette approximation diophantienne à l'aide des fractions continue est connue **d'Aryabhata** (mathématicien astronome indien vers 500) qui l'utilise en particulier pour calculer des racines carrées et cubiques.

On doit à **Hippase de Métaponte** (élève de **Pythagore**) la révélation au monde (vers -500) de l'existence de nombre non rationnels, ce qui aurait provoqué l'ire des autres disciples qui l'auraient jeté à la mer.

Hippase aurait révélé l'irrationalité du nombre d'or ($\frac{1+\sqrt{5}}{2}$) ou de la longueur de la diagonale d'un carré de coté 1 ($\sqrt{2}$) . Examinons comment se fait cette dernière démonstration par l'absurde. Au préalable remarquons que :

- si n est pair, n^2 est pair
- si n est impair n^2 est impair
- ***n* est pair si et seulement si *n*² est pair**.

Supposons qu'il existe 2 entiers tels que $\sqrt{2}=\frac{p}{q}$ est une fraction irréductible de 2 entiers.

Alors

$p^2=2q^2 \Rightarrow p^2 \text{ pair} \Rightarrow p \text{ pair} \Rightarrow p=2p' \Rightarrow p^2=4p'^2 \Rightarrow 2q^2=4p'^2 \Rightarrow q^2=2p'^2 \Rightarrow q \text{ pair} \Rightarrow q=2q'$

D'où $\frac{p}{q}=\frac{2p'}{2q'}$ est réductible ce qui contredit l'hypothèse de départ.

5 Les engrenages de la machine d'Anticythère

Dans la machine d'Anticythère, découverte dans l'épave d'une galère romaine qui a été coulée à l'époque du siège de Syracuse, le nombre de dents des engrenages de son mécanisme permettent de retrouver la périodicité des éclipses prédites par le Saros. Le Saros est la plus courte période qui est un commun multiple des mois synodiques, draconiques et anomalistiques.

Dans un premier temps on cherche un commun multiple du mois synodique S = 29.530589 jours et du mois draconique D = 27.212211 jours. On cherche des petits entiers s et d tels que :

$$sS \simeq dD$$

ce qui revient à chercher le rapport qui approche au mieux $\frac{S}{D}=1.08519623$

L'application des méthodes précédentes conduit à la fraction continue suivante :

$$\frac{S}{D}=[1,11,1,2,1,4,3,2,2,4,4,3,1,2,1,22,...]$$

et au tableau des réduites suivant :

	s	d	dD - sD
1	1	1	2.318
2	11	12	1.710
3	12	13	0.608
4	35	38	0.493
5	47	51	0.115
6	223	242	0.034
7	716	777	0.014

Les 6ème et 7ème approximations, à moins de 0.034 jour près (moins d'une heure) sont excellentes.
Par ailleurs, si on considère la durée A = 27.55455 jours du mois anomalistique, et que l'on cherche le nombre arrondi entier a de ces mois dans la durée moyenne $\frac{sS+dD}{2}$ et qu'on calcule l'écart de aA à cette durée moyenne, on trouve :

	1	2	3	4	5	6	7
a	1	12	13	38	50	239	767
écart	0.817	4.963	4.146	13.256	10.153	0.199	9.555

Ainsi la 6ème approximation est excellente en ce qui concerne la coïncidence anomalistique, ce qui explique, a posteriori, cette solution qui est donc constitué de :

- 223 mois synodiques
- 242 mois draconiques
- 239 mois anomalistiques.

Elle dure 18 ans et 10 à 11 jours environ (suivant le calage des années bissextiles). Cette période de retour des éclipses tous les 18 ans est citée dans une tablette babylonienne.
La machine d'Anticythère comporte les engrenages avec 223, 242 et 239 dents.