Inversion géométrique et problème de Napoléon

Table des matières

1 Introduction

L'inversion géométrique est une transformation ponctuelle de l'espace. Elle était sûrement pratiquée par les mathématiciens ou astronomes grecs comme Hipparque qui pratiquait la projection stéréographique dans la conception des astrolabes, ou Apollonius de Perge qui écrivit un ouvrage de référence sur les coniques. Puis elle resurgit au 19ème siècle où elle fut très utilisée, en particulier par Adolphe Quételet (1796-1874), Giusto Bellavitis (1803-1880), Jacob Steiner (1796-1863) et Ludwig Magnus (1790-1861). L'inversion était encore enseignée en terminale en 1963, mais son enseignement a disparu de l'enseignement secondaire à la fin des années 1960 avec la réforme dite des maths modernes, puis avec la révolution apportée par l'informatique.
Dans ce petit mémo nous présentons rapidement les propriétés de l'inversion pour les utiliser ensuite dans une démonstration élégante de la solution au problème de Napoléon.

2 Principales propriétés

Étant donné un point O de l'espace et un nombre positif , l'inversion fait correspondre à un point M quelconque de l'espace, un autre point M' situé sur la droite OM tel que le produit algébrique des longueurs et soit égal à k.

$$\overline{OM} \cdot \overline{OM'} = k = r^2$$

Si le point O et tous les points M sont dans un même plan, les point M' sont dans le même plan.

2.1 Invariants

Dans le plan, les points du cercle de centre O et de rayon *r* sont invariants. Dans l'espace, les points de la sphère de centre O et de rayon r sont invariants

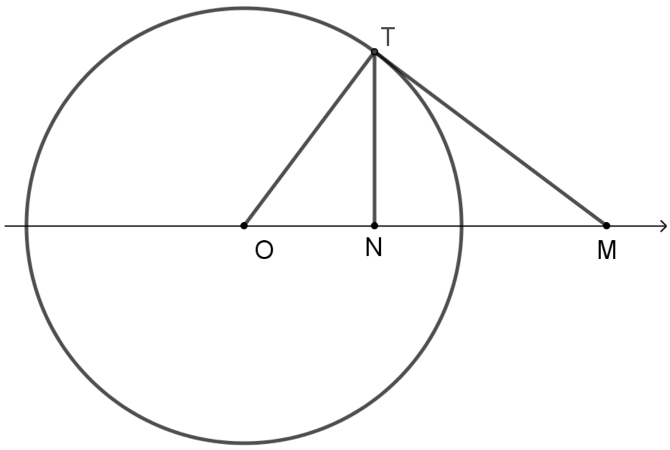
Toute droite qui passe par le point O est globalement invariante, mais les points destination ne sont pas à la même position que les points source à l'exception de ceux situés à la distance *r* de O qui restent en place.

2.2 Construction géométrique de l'inverse d'un point :

Traçons le cercle de rayon *r* et de centre O qui est invariant dans l'inversion. Nous l'appellerons cercle d'inversion.

Soit à trouver l'inverse du point M extérieur au cercle. Traçons l'axe OM, puis de M menons une tangente au cercle. Du point de tangence T abaissons la perpendiculaire à OM. Le point N, pied de la perpendiculaire est l'inverse du point M. En effet, les triangles rectangles ONT et OTM étant semblables on a :

$$\frac{ON}{OT}=\frac{OT}{OM} \Rightarrow OM \cdot ON = OT^2 = r^2$$



Réciproquement, pour trouver l'inverse d'un point N intérieur au cercle, on trace l'axe ON, puis par N on mène une hauteur à l'axe qui coupe le cercle en 2 points dont T. Par T on mène la tangente au cercle qui coupe l'axe en M.

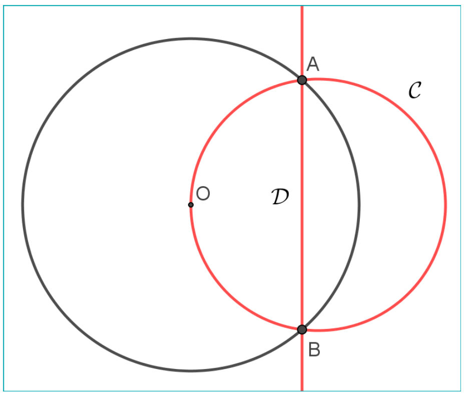
2.3 Inverse d'une droite

Nous avons déjà signalé que l'inverse d'une droite passant par O est la droite elle-même.

A l'exception de ce cas particulier, les inverses des droites sont des cercles. Ces cercles passent par l'origine car l'origine (à distance zéro) est l'inverse des points de la droite qui sont à l'infini.

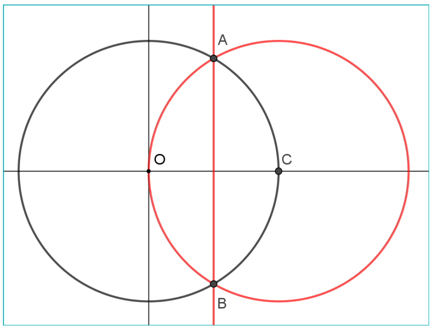
2.3.1 Droite coupant le cercle d'inversion

Dans ce cas la transformée de la droite $\mathcal{D}$ est tout simplement le cercle $\mathcal{C}$ passant par O et par les deux points d'intersection A et B qui sont invariants dans la transformation.



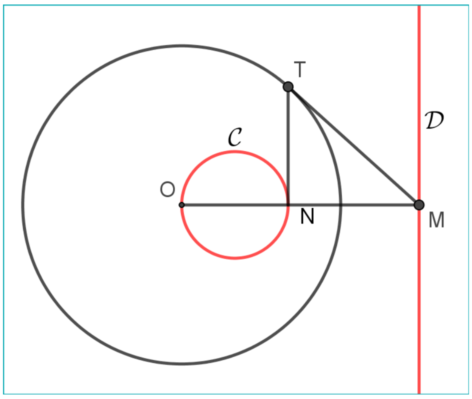
Remarque : Réciproquement, l'inverse du cercle $\mathcal{C}$ qui passe par O et qui intersecte le cercle d'inversion est la droite qui passe par les deux points d'intersection.

Remarque : Si le cercle $\mathcal{C}$ de centre C qui passe par O a le même rayon que le cercle d'inversion, son inverse, la droite AB, est médiatrice du segment qui joint les deux centres. Ce résultat sera exploité plus loin.



2.3.2 Droite extérieure au cercle d'inversion

Les inverses des points à l'infini de la droite $\mathcal{D}$ sont en O. Abaissons de O la perpendiculaire OM à la droite $\mathcal{D}$, et construisons l'inverse N du point M comme nous l'avons précédemment appris. Comme la droite $\mathcal{D}$ est symétrique par rapport à l'axe OM, le cercle $\mathcal{C}$ inverse de $\mathcal{D}$ le sera aussi, c'est donc le cercle de diamètre ON.



Remarque : Réciproquement l'inverse d'un cercle passant par O et intérieur au cercle d'inversion est une droite D extérieure au cercle d'inversion.

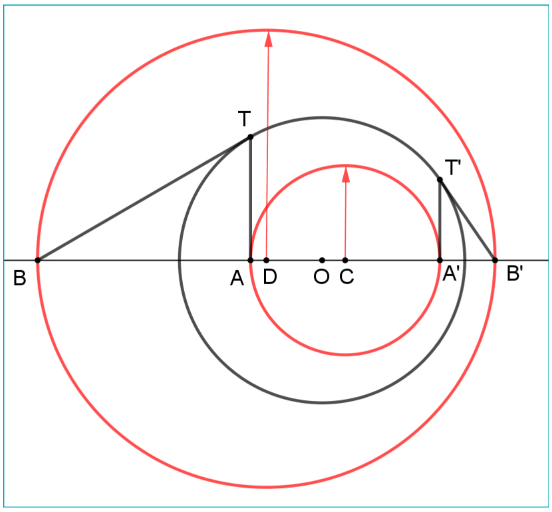
2.4 Inverse d'un cercle

Nous connaissons déjà l'inverse d'un cercle qui passe par le point O :

- S'il intersecte le cercle d'inversion, c'est la droite qui passe par les points d'intersection. Dans le cas où le cercle à transformer est tangent au cercle d'inversion, sa transformée est la tangente au point de tangence des deux cercles (et réciproquement).
- S'il est extérieur au cercle d'inversion, c'est la droite extérieure au cercle d'inversion, comme nous l'avons vu dans la dernière remarque, ci-avant.

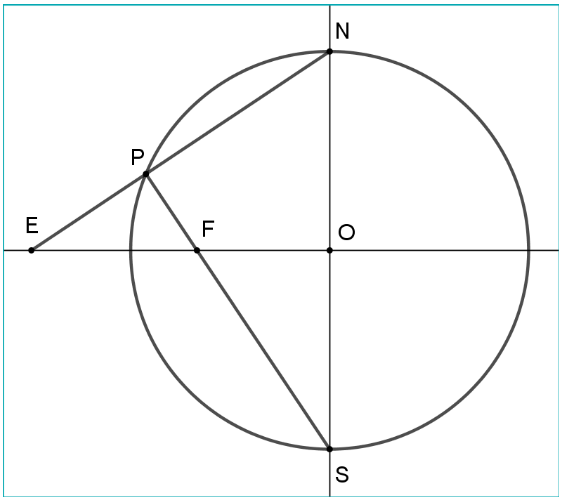
L'inverse d'un cercle qui ne passe pas par O est un autre cercle qui lui aussi ne passe pas par O :

- Si le cercle coupe le cercle d'inversion, on a déjà 2 points du cercle transformé. On utilisera la méthode géométrique pour trouver un troisième point, par exemple un des points d'intersection du cercle à transformer avec la droite qui joint les centres.
- Si le cercle de centre C ne coupe pas le cercle d'inversion, on tracera les transformés des points d'intersection du cercle à transformer avec la droite OC qui joint les centres. Ces points A et A' constituent un diamètre du cercle à transformer, et les transformés B et B' seront un diamètre du cercle recherché.



3 Projection stéréographique

Les projections stéréographiques consistent à projeter les points de la sphère de centre O sur un plan. Les plus courantes utilisent comme centre de projection le pôle Nord N ou le pôle sud S et projettent un point P de la sphère à l'intersection des demi-droites NP ou SP avec un plan orthogonal à l'axe NS, généralement le plan équatorial passant par O. Dans ce cas, le projeté de pôle N est E et le projeté de pôle S est F.



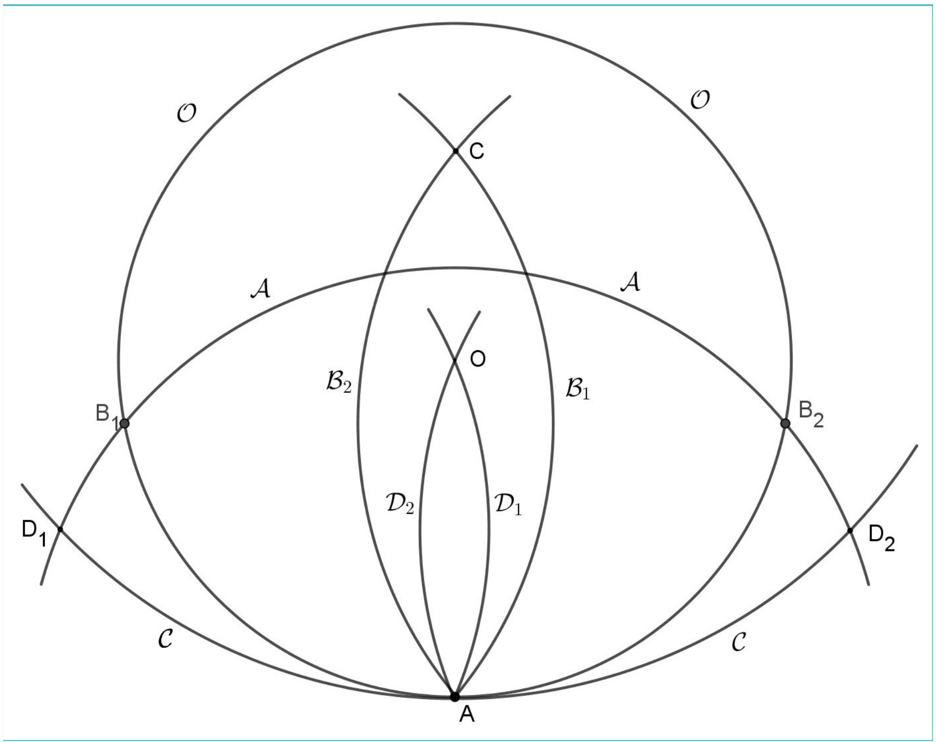
Une propriété remarquable de cette projection est que les deux projetés sont inverses l'un de l'autre dans l'inversion de centre O et de rapport $k=r^2$ avec $r=\|ON\|=\|OS\|$. En effet en considérant les triangles rectangles semblables FOS et NOE, on a :

$$\frac{OF}{OS}=\frac{ON}{OE} \Rightarrow OF\cdot OE=OS\cdot ON \Rightarrow OF\cdot OE=r^2$$

4 Le problème de Napoléon

Le problème de Napoléon consiste à trouver le centre d'un cercle, sans utiliser de règle, uniquement en traçant des cercles avec un compas.

Voici une construction solution de ce problème :

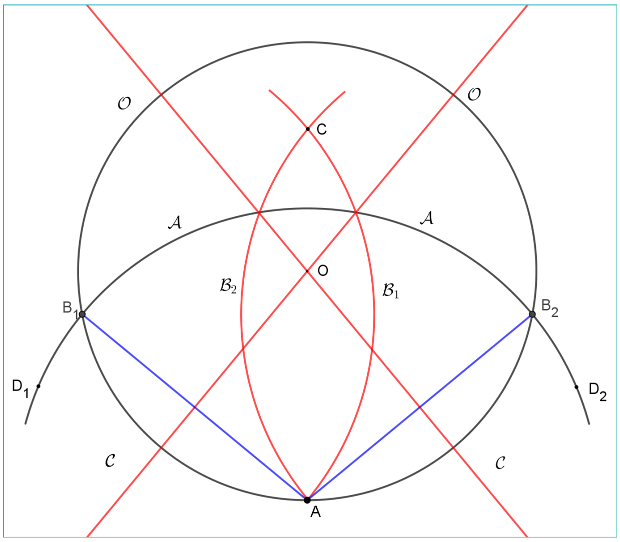


Soit à trouver le centre du cercle $\mathcal{O}$ uniquement avec un compas.

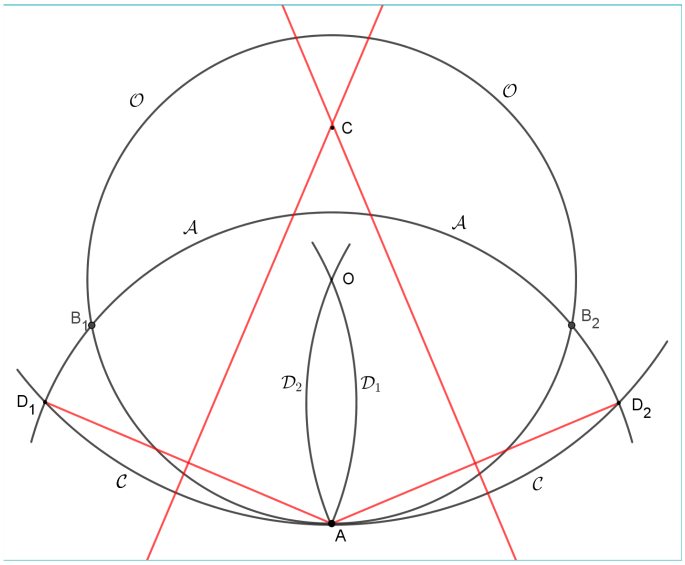
- Au début pas d'autre alternative que de placer la pointe du compas sur le cercle. Soit A le premier centre choisi, de rayon forcement arbitraire, mais ni trop grand, ni trop petit. Le premier cercle tracé $\mathcal{A}$, coupe le cercle $\mathcal{O}$ en 2 points B_1 et B_2.
- Ces 2 nouveaux points vont servir de centres pour les cercles suivants $\mathcal{B}1$ et $\mathcal{B}2$. Quel rayon. Et bien on conserve le rayon initial. Nos 2 nouveaux cercles vont donc se couper en A et en un nouveau point C.
- Ce nouveau point va servir de centre au quatrième cercle. Quel rayon. On a le choix entre CB_1 ou CA. Ce dernier est le bon choix. Le cercle $\mathcal{C}$ que l'on trace coupe le cercle $\mathcal{A}$ en 2 points D_1 et D_2.
- Ces deux nouveaux points vont servir de centres pour les cercles suivants $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$, de rayon tels qu'ils passent par A. Ils se recoupent en un point O.

Nous allons utiliser l'inversion géométrique pour montrer que ce point O est le centre du cercle $\mathcal{O}$. On trouvera ici https://fr.wikipedia.org/wiki/Probl%C3%A8me_de_Napol%C3%A9on, une démonstration basée sur les triangles semblables, ainsi que la démonstration par inversion que j'ai ajoutée le 9 février 2012.

On considère l'inversion de centre A qui laisse le cercle $\mathcal{A}$ invariant.



D'après la remarque faite au paragraphe 2.3.1, les médiatrices des cordes AB_1 et AB_2 du cercle $\mathcal{O}$ sont les inverses des cercles $\mathcal{B}1$ et $\mathcal{B}2$ dans l'inversion. Ces cercles se coupent en C qui est donc l'inverse du point d'intersection des deux médiatrices des cordes du cercle $\mathcal{O}$, médiatrices qui se coupent au centre recherché de ce cercle $\mathcal{O}$. Le point C est donc l'inverse du point O centre recherché.



De même, les médiatrices des cordes AD_1 et AD_2 du cercle $\mathcal{C}$ sont les inverses des cercles $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$. Ces cercles se recoupent en O' qui est ainsi l'inverse du point d'intersection des médiatrices des cordes du cercle $\mathcal{C}$, c'est-à-dire le point C centre du cercle $\mathcal{C}$. Le point O' est donc l'inverse du point C. Mais comme le point C est l'inverse du centre O recherché, le point O' est confondu avec O. Les cercles $\mathcal{D}1$ et $\mathcal{D}2$ se coupent bien au centre recherché du cercle $\mathcal{O}$.