Corrigé BE-1 Rendez-Vous Spatial

Michel Llibre

1er février 2008

Table des matières

1 Premier BE RDV Spatial

1.1 Mise sous forme d'état

Soit les équations différentielles :

$$\ddot{x} - 2\omega\dot{z} = \varphi_x$$
$$\ddot{z} + 2\omega\dot{x} - 3\omega^2 z = \varphi_z$$

En prenant comme vecteur d'état $X^T = (z, x, \dot{z}, \dot{x})$, elle s'écrivent :

$$\dot{x}_1 = x_3$$
$$\dot{x}_2 = x_4$$
$$\dot{x}_3 = 3\omega^2 x_1 - 2\omega x_4 + \varphi_z$$
$$\dot{x}_4 = 2\omega x_3 + \varphi_x$$

Soit, sous forme matricielle :

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{AX} + \mathbf{Bu} \text{ avec } \mathbf{u} = \begin{pmatrix} \varphi_z \\ \varphi_x \end{pmatrix}.$$

et :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3\omega^2 & 0 & 0 & -2\omega \\ 0 & 0 & 2\omega & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1.2 Gouvernabilité

1.2.1 Avec la poussée tangentielle φ_x seule

$$\mathbf{B}_x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{AB}_x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2\omega \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{A}^2\mathbf{B}_x = \begin{pmatrix} -2\omega \\ 0 \\ 0 \\ -4\omega^2 \end{pmatrix}, \mathbf{A}^3\mathbf{B}_x = \begin{pmatrix} 0 \\ -4\omega^2 \\ 2\omega^3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & -2\omega & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4\omega^2 \\ 0 & -2\omega & 0 & 2\omega^3 \\ 1 & 0 & -4\omega^2 & 0 \end{vmatrix} = 12\omega^4$$

Le système est gouvernable avec φ_x seul.

1.2.2 Avec la poussée normale φ_z seule

$$\mathbf{B}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{AB}_z = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2\omega \end{pmatrix}, \mathbf{A}^2\mathbf{B}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 2\omega \\ -\omega^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{A}^3\mathbf{B}_z = \begin{pmatrix} -\omega^2 \\ 0 \\ 0 \\ -2\omega^3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & -\omega^2 \\ 0 & 0 & 2\omega & 0 \\ 1 & 0 & -\omega^2 & 0 \\ 0 & 2\omega & 0 & -2\omega^3 \end{vmatrix} = 0$$

Le système n'est pas gouvernable avec la poussée normale φ_z seule.

1.3 Application du principe du maximum au SLCQ

Le Hamiltonien s'écrit :

$$H = \psi^T (\mathbf{AX} + \mathbf{Bu}) - \frac{1}{2}\mathbf{u}^T\mathbf{u}$$

1.3.1 Intégration du système adjoint

Le système adjoint s'écrit :

$$\dot{\psi} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{X}} = -\mathbf{A}^T \psi$$

Soit :

$$\dot{\psi} + \mathbf{A}^T \psi = \mathbf{0}$$

$\mathbf{A}$ étant constant, cette équation différentielle linéaire s'intègre en :

$$\psi(t) = e^{-\mathbf{A}^T t}\psi_0$$

en fonction du vecteur adjoint initial $\psi(0) = \psi_0$ inconnu.

1.3.2 Commande optimale

La commande optimale est donnée par :

$$\frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{B}^T \psi - \mathbf{u} = \mathbf{0}$$

D'où :

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{B}^T \psi = \mathbf{B}^T e^{-\mathbf{A}^T t}\psi_0$$

1.3.3 Intégration littérale des équations d'état

En portant la commande dans le système, on obtient :

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{AX} + \mathbf{BB}^T e^{-\mathbf{A}^T t}\psi_0$$

Le système sans second membre $\dot{\mathbf{X}} - \mathbf{AX} = \mathbf{0}$ a pour solution générale :

$$\mathbf{X}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{X}_0$$

avec $\mathbf{X}(0) = \mathbf{X}_0$. On cherche une solution particulière de l'équation complète en faisant varier la constante $\mathbf{X}_0$ notée $\mathbf{Y}$ dans ce qui suit :

$$\mathbf{X}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{Y}(t)$$

En reportant dans l'équation complète, on obtient :

$$e^{\mathbf{A}t}\dot{\mathbf{Y}} + \mathbf{A}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{Y} = \mathbf{A}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{Y} + \mathbf{BB}^T e^{-\mathbf{A}^T t}\psi_0$$

D'où :

$$\dot{\mathbf{Y}} = e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{B}\mathbf{B}^T e^{-\mathbf{A}^T t}\psi_0$$
$$\mathbf{Y}(t) = \mathbf{Y}(0) + \int_0^t e^{-\mathbf{A}\tau}\mathbf{B}\mathbf{B}^T e^{-\mathbf{A}^T\tau}\psi_0 d\tau$$

avec $\mathbf{Y}(0) = \mathbf{X}_0$.

D'où finalement :

$$\mathbf{X}(t) = e^{\mathbf{A}t}\left[\mathbf{X}_0 + \left(\int_0^t e^{-\mathbf{A}\tau}\mathbf{B}\mathbf{B}^T e^{-\mathbf{A}^T\tau}d\tau\right)\psi_0\right]$$

Posons

$$\mathbf{C}(t) = \int_0^t e^{-\mathbf{A}\tau}\mathbf{B}\mathbf{B}^T e^{-\mathbf{A}^T\tau}d\tau$$

avec par définition :

$$\mathbf{C}(0) = \mathbf{0}_{4\times 4}$$

La solution générale s'écrit :

$$\mathbf{X}(t) = e^{\mathbf{A}t}\left(\mathbf{X}_0 + \mathbf{C}(t)\psi_0\right)$$

1.3.4 Résolution littérale du système au deux bouts

On déduit de l'expression précédente que :

$$\psi_0 = \mathbf{C}^{-1}(T)e^{-\mathbf{A}T}\left(\mathbf{X}(T) - e^{\mathbf{A}T}\mathbf{X}_0\right)$$

Si on désire que $\mathbf{X}(T) = 0$, il faut que :

$$\psi_0 = -\mathbf{C}^{-1}(T)\mathbf{X}_0$$

D'où la trajectoire optimale :

$$\mathbf{X}(t) = e^{\mathbf{A}t}\left(\mathbf{I} - \mathbf{C}(t)\mathbf{C}^{-1}(T)\right)\mathbf{X}_0$$

et la commande en boucle ouverte :

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{B}^T e^{-\mathbf{A}^T t}\mathbf{C}^{-1}(T)\mathbf{X}_0$$

1.3.5 Evaluation du revenu

Le revenu optimal s'écrit :

$$\begin{aligned}
\mathscr{R}(t) &= \frac{1}{2}\int_t^T \mathbf{u}^T\mathbf{u}dt \\
&= \frac{1}{2}\int_t^T \psi_0^T e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{B}\mathbf{B}^T e^{-\mathbf{A}^T t}\psi_0 dt \\
&= \frac{1}{2}\psi_0^T\left[\mathbf{C}(T) - \mathbf{C}(t)\right]\psi_0 \\
&= -\frac{1}{2}\psi_0^T\mathbf{X}_0 - \frac{1}{2}\psi_0^T\left(e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{X}(t) - \mathbf{X}_0\right) \\
&= -\frac{1}{2}\psi^T(t)\mathbf{X}(t)
\end{aligned}$$

et en particulier :

$$\mathscr{C} = \mathscr{R}(0) = -\frac{1}{2}\psi_0^T\mathbf{X}_0$$

Remarque : On vérifie bien que :

$$\psi = -\frac{\partial\mathscr{R}}{\partial\mathbf{X}}$$

définition du vecteur adjoint dans l'établissement du principe du maximum à partir de la programmation dynamique.

1.3.6 Expression littérale de la commande en boucle fermée

La commande initiale s'écrit :

$$\mathbf{u}(0) = -\mathbf{B}^T \mathbf{C}^{-1}(T)\mathbf{X}(0)$$

et la commande en boucle fermée s'écrit :

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{B}^T \mathbf{C}^{-1}(T-t)\mathbf{X}(t)$$

Remarque : Si on extrait $\mathbf{X}_0$ en fonction de $\mathbf{X}(t)$ dans $\mathbf{X}(t) = e^{\mathbf{A}t}\left(\mathbf{I} - \mathbf{C}(t)\mathbf{C}^{-1}(T)\right)\mathbf{X}_0$ et qu'on reporte sa valeur dans l'expression de la commande en boucle ouverte $\mathbf{u}(t) = -\mathbf{B}^T e^{-\mathbf{A}^T t}\mathbf{C}^{-1}(T)\mathbf{X}_0$, on obtient :

$$\mathbf{X}_0 = \left(\mathbf{I} - \mathbf{C}(t)\mathbf{C}^{-1}(T)\right)^{-1} e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{X}(t)$$

soit :

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{B}^T e^{-\mathbf{A}^T t}\mathbf{C}^{-1}(T)\left(\mathbf{I} - \mathbf{C}(t)\mathbf{C}^{-1}(T)\right)^{-1} e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{X}(t) = -\mathbf{B}^T \mathbf{C}^{-1}(T-t)\mathbf{X}(t)$$

On pourra vérifier que :

$$e^{-\mathbf{A}^T t}\mathbf{C}^{-1}(T)\left[\mathbf{I} - \mathbf{C}(t)\mathbf{C}^{-1}(T)\right]^{-1} e^{-\mathbf{A}t} = \mathbf{C}^{-1}(T-t)$$

simplification qui n'est pas évidente a priori. On voit tout l'intérêt de l'astuce du passage de la boucle ouverte à la boucle fermée par le calcul de $\mathbf{u}(0)$, puis par les substitutions $\mathbf{X}(0) \to \mathbf{X}(t)$, et $T \to T - t$.

1.4 Cas SLCQ développé

1.4.1 Calcul de e^{At} et $e^{-A^T t}$

La matrice $\mathbf{A}$ a pour polynôme caractéristique :

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \lambda^4 + \omega^2\lambda^2 = \lambda^2\left(\lambda^2 + \omega^2\right) = 0$$

Elle n'est pas diagonalisable, car la valeur propre double $\lambda = 0$ n'a qu'un seul vecteur propre $\vec{e}_2$. Plutot que de passer par les exponentielles des formes canoniques de Jordan, on va calculer les exponentielles $e^{\mathbf{A}t}$ et $e^{-\mathbf{A}^T t}$ directement par leur développant en série infinie. Ce développement ne fera intervenir que les puissances de $\mathbf{A}$ ou de $\mathbf{A}^T$ limitées à l'ordre 3 car (théorème de Cayley -Hamilton) $\mathbf{A}$ étant racine de son équation caractéristique, on a :

$$\mathbf{A}^4 + \omega^2\mathbf{A}^2 = 0 \to \left\{\begin{array}{c} \mathbf{A}^4 = -\omega^2\mathbf{A}^2 \\ \mathbf{A}^5 = -\omega^2\mathbf{A}^3 \\ \mathbf{A}^6 = -\omega^2\mathbf{A}^4 = \omega^4\mathbf{A}^2 \\ \mathbf{A}^7 = \omega^4\mathbf{A}^3 \\ \dots \end{array}\right.$$

D'où :

$$\begin{aligned}
e^{\mathbf{A}t} &= 1 + \mathbf{A}t + \frac{1}{2!}\mathbf{A}^2t^2 + \frac{1}{3!}\mathbf{A}^3t^3 + \frac{1}{4!}\mathbf{A}^4t^4 + \frac{1}{5!}\mathbf{A}^5t^5 + \frac{1}{6!}\mathbf{A}^6t^6 + \frac{1}{7!}\mathbf{A}^7t^7 + \dots \\
&= 1 + \mathbf{A}t + \frac{1}{2!}\mathbf{A}^2t^2 + \frac{1}{3!}\mathbf{A}^3t^3 - \frac{1}{4!}\omega^2\mathbf{A}^2t^4 - \frac{1}{5!}\omega^2\mathbf{A}^3t^5 + \frac{1}{6!}\omega^4\mathbf{A}^2t^6 + \frac{1}{7!}\omega^4\mathbf{A}^3t^7 - \dots \\
&= 1 + \mathbf{A}t + \mathbf{A}^2\left(\frac{1}{2!}t^2 - \frac{1}{4!}\omega^2t^4 + \frac{1}{6!}\omega^4t^6 - \dots\right) + \mathbf{A}^3\left(\frac{1}{3!}t^3 - \frac{1}{5!}\omega^2t^5 + \frac{1}{7!}\omega^4t^7 - \dots\right) \\
&= 1 + \mathbf{A}t + \frac{1}{\omega^2}\mathbf{A}^2(1 - \cos\omega t) + \frac{1}{\omega^3}\mathbf{A}^3(\omega t - \sin\omega t)
\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}
e^{-\mathbf{A}^T t} &= 1 - \mathbf{A}^T t + \frac{1}{2!}\mathbf{A}^{T2}t^2 - \frac{1}{3!}\mathbf{A}^{T3}t^3 + \frac{1}{4!}\mathbf{A}^{T4}t^4 - \frac{1}{5!}\mathbf{A}^{T5}t^5 + \frac{1}{6!}\mathbf{A}^{T6}t^6 - \frac{1}{7!}\mathbf{A}^{T7}t^7 \dots \\
&= 1 - \mathbf{A}^T t + \frac{1}{2!}\mathbf{A}^{T2}t^2 - \frac{1}{3!}\mathbf{A}^3t^3 - \frac{1}{4!}\omega^2\mathbf{A}^{T2}t^4 + \frac{1}{5!}\omega^2\mathbf{A}^{T3}t^5 + \frac{1}{6!}\omega^4\mathbf{A}^{T2}t^6 - \frac{1}{7!}\omega^4\mathbf{A}^{T3}t^7 - \dots \\
&= 1 - \mathbf{A}^T t + \mathbf{A}^{T2}\left(\frac{1}{2!}t^2 - \frac{1}{4!}\omega^2t^4 + \frac{1}{6!}\omega^4t^6 - \dots\right) - \mathbf{A}^{T3}\left(\frac{1}{3!}t^3 - \frac{1}{5!}\omega^2t^5 + \frac{1}{7!}\omega^4t^7 - \dots\right) \\
&= 1 - \mathbf{A}^T t + \frac{1}{\omega^2}\mathbf{A}^{T2}(1 - \cos\omega t) - \frac{1}{\omega^3}\mathbf{A}^{T3}(\omega t - \sin\omega t)
\end{aligned}$$

Calculons $\mathbf{A}^2$ et $\mathbf{A}^3$:

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3\omega^2 & 0 & 0 & -2\omega \\ 0 & 0 & 2\omega & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \mathbf{A}^2=\begin{pmatrix} 3\omega^2 & 0 & 0 & -2\omega \\ 0 & 0 & 2\omega & 0 \\ 0 & 0 & -\omega^2 & 0 \\ 6\omega^3 & 0 & 0 & -4\omega^2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}^3=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -\omega^2 & 0 \\ 6\omega^3 & 0 & 0 & -4\omega^2 \\ -3\omega^4 & 0 & 0 & 2\omega^3 \\ 0 & 0 & -2\omega^3 & 0 \end{pmatrix}$$

D'où :

$$e^{\mathbf{A}t}=\begin{pmatrix} 4-3\cos\omega t & 0 & \frac{1}{\omega}\sin\omega t & \frac{2}{\omega}(\cos\omega t-1) \\ 6(\omega t-\sin\omega t) & 1 & \frac{2}{\omega}(1-\cos\omega t) & \frac{1}{\omega}(4\sin\omega t-3\omega t) \\ 3\omega\sin\omega t & 0 & \cos\omega t & -2\sin\omega t \\ 6\omega(1-\cos\omega t) & 0 & 2\sin\omega t & 4\cos\omega t-3 \end{pmatrix}$$

et :

$$e^{-\mathbf{A}^T t}=\begin{pmatrix} 4-3\cos\omega t & 6\sin\omega t-6\omega t & -3\omega\sin\omega t & 6\omega(1-\cos\omega t) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\omega}\sin\omega t & \frac{2}{\omega}(1-\cos\omega t) & \cos\omega t & -2\sin\omega t \\ -\frac{2}{\omega}(1-\cos\omega t) & \frac{1}{\omega}(3\omega t-4\sin\omega t) & 2\sin\omega t & 4\cos\omega t-3 \end{pmatrix}$$

1.4.2 Calcul de $\mathbf{C}(t)$

On a :

$$\mathbf{C}(t)=\int_0^t e^{-\mathbf{A}\tau}\mathbf{B}\mathbf{B}^T e^{-\mathbf{A}^T\tau}d\tau$$

Lorsque $\mathbf{A}$ est régulière, une primitive $\mathbf{C}_1(t)$ de $e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{B}\mathbf{B}^T e^{-\mathbf{A}^T t}$ s'écrit :

$$\mathbf{C}_1(t)=e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{M}e^{-\mathbf{A}^T t}$$

où $\mathbf{M}$ est solution de l'équation de Lyapunov :

$$\mathbf{A}\mathbf{M}+\mathbf{M}\mathbf{A}^T=-\mathbf{B}\mathbf{B}^T$$

Dans notre cas la primitive ne peut pas se mettre sous la forme $\mathbf{C}_1(t)$.
Calculons une primitive terme à terme. En posant $\mathbf{D}(\tau)=e^{-\mathbf{A}\tau}\mathbf{B}$, il vient :

$$\mathbf{C}(t)=\int_0^t \mathbf{D}(\tau)\mathbf{D}^T(\tau)\,d\tau$$

Or avec $\mathbf{B}^T=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, on a :

$$\mathbf{D}(\tau)=\begin{pmatrix} \frac{2}{\omega}(\cos\omega\tau-1) \\ -\frac{1}{\omega}(4\sin\omega\tau-3\omega\tau) \\ 2\sin\omega\tau \\ 4\cos\omega\tau-3 \end{pmatrix}$$

d'où :

$$C(t)=\int_0^t \begin{pmatrix} \frac{4}{\omega^2}(c-1)^2 & -\frac{2}{\omega^2}(c-1)(4s-3\theta) & \frac{4}{\omega}(c-1)s & \frac{2}{\omega}(c-1)(4c-3) \\ -\frac{2}{\omega^2}(c-1)(4s-3\theta) & \frac{1}{\omega^2}(4s-3\theta)^2 & -\frac{2}{\omega}(4s-3\theta)s & -\frac{1}{\omega}(4s-3\theta)(4c-3) \\ \frac{4}{\omega}(c-1)s & -\frac{2}{\omega}(4s-3\theta)s & 4s^2 & 2s(4c-3) \\ \frac{2}{\omega}(c-1)(4c-3) & -\frac{1}{\omega}(4s-3\theta)(4c-3) & 2s(4c-3) & (4c-3)^2 \end{pmatrix} d\tau$$

ou on a posé $\theta=\omega\tau$, $c=\cos\theta$ et $s=\sin\theta$.

Soit :

$$\mathbf{C}(t) = \begin{pmatrix} 2\dfrac{cs-4s+3\theta}{\omega^3} & \dfrac{4c^2-2c-2-3\theta^2+6s\theta}{\omega^3} & -\dfrac{2(1-c)^2}{\omega^2} & \dfrac{4cs-14s+10\theta}{\omega^2} \\ \dfrac{4c^2-2c-2-3\theta^2+6s\theta}{\omega^3} & \dfrac{-8cs-24s+24\theta c+8\theta+3\theta^3}{\omega^3} & \dfrac{4cs+6s-4\theta-6\theta c}{\omega^2} & \dfrac{16c^2+24s\theta-9\theta^2-16}{2\omega^2} \\ -\dfrac{2(1-c)^2}{\omega^2} & \dfrac{4cs+6s-4\theta-6\theta c}{\omega^2} & \dfrac{2(\theta-cs)}{\omega} & \dfrac{-4c^2+6c-2}{\omega} \\ \dfrac{4cs-14s+10\theta}{\omega^2} & \dfrac{16c^2+24s\theta-9\theta^2-16}{2\omega^2} & \dfrac{-4c^2+6c-2}{\omega} & \dfrac{8cs+17\theta-24s}{\omega} \end{pmatrix}$$

où on a posé $\theta = \omega t$, $c = \cos\theta$ et $s = \sin\theta$.

2 Annexe premier RDV Spatial

2.1 Listings des procédures Matlab

2.1.1 Calcul $e^{\mathbf{A}t}$

Fichier expat.m

```
% Calcul de la matrice expt(At) en fonction de t et Omega
function eAt = expat(t, Om)
a = Om*t; c = cos(a); s = sin(a); umc = 1-c;
a14 = -2*umc/Om;
a24 = (4*s-3*a)/Om;
eAt = [4-3*c     0   s/Om        a14;
      6*(a-s)    1 2*umc/Om     a24;
      3*Om*s     0   c          -2*s;
     6*Om*umc    0  2*s         4*c-3];
return
```

2.1.2 Calcul C(t)

Fichier matc.m

```
% Calcul de la matrice C(t) en fonction de t et Omega
function C = matc(t, Om)
Om2 = Om*Om; Om3 = Om2*Om;
a = Om*t; a2 = a*a; a3 = a2*a;
c = cos(a); c2 = c*c;
s = sin(a); s2 = s*s;
umc = 1-c; umc2 = umc*umc;
c11 = 2*(c*s + 3*a - 4*s)/Om3;
c21 = -(-4*c2 + 2*c - 6*a*s + 3*a2 + 2)/Om3;
c31 = -2*umc2/Om2;
c41 = 2*(2*c*s + 5*a - 7*s)/Om2;
c22 = (-8*c*s + 8*a - 24*s + 24*a*c + 3*a3)/Om3;
c32 = -2*(-2*c*s + 2*a - 3*s + 3*a*c)/Om2;
c42 = -0.5*(-16*c2 - 24*a*s + 9*a2 +16)/Om2;
c33 = 2*(a-c*s)/Om;
c43 = -2*(2*c2 - 3*c + 1)/Om;
c44 = (8*c*s + 17*a -24*s)/Om;
C = [c11 c21 c31 c41;c21 c22 c32 c42;c31 c32 c33 c43;c41 c42 c43 c44];
return
```

2.1.3 Résolution système aux deux bouts

Fichier mainslcq.m

```
% Resolution du BE de RDV Spatial en SLCQ
function Psi0SLCQ = mainslcq(Tracesol)
Torb = 5400.;           % Période orbitale
Omega = 2*pi/Torb;
X0 = [0;-1000;0;0]; % Etat initial
Tfin = Torb/4.;    % Horizon initial du pb
Npoint = 199;           % Nombre de points pour les tracés des trajectoires
%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Solution SLCQ %
%%%%%%%%%%%%%%%%%
[Psi0SLCQ TrajX Traju] = solslcq(X0, Tfin, Omega, Npoint);
critSLCQ = -0.5*Psi0SLCQ'*X0;

disp(['Psi0 quadratique = ' num2str(Psi0SLCQ')]);
```

```
disp(['Critere quadratique = ' num2str(critSLCQ)]);
    if Tracesol == 1
TrajX(3,1:end) = TrajX(3,1:end)*100.;
TrajX(4,1:end) = TrajX(4,1:end)*100.;
winplein = figure( 'Position', [ 300 100 640 600 ], ...
              'PaperType', 'a4letter', ...
              'PaperUnits', 'centimeters', ...
              'PaperPosition', [2 2 17 22]) ;
subplot(2,2,1); plot(TrajX'); grid on; title('Trajectoires d''état');
subplot(2,2,2); plot(Traju); grid on; title('Trajectoire de commande');
subplot(2,2,4); plot(TrajX(1,:),TrajX(2,:)); axis([-500 1500 -2500 1500]); hold on;
plot([0 1400],[0 0]); plot(1300,0,'>'); text(1400,0,'Z');
plot([0 0],[0 1000]); plot(0,1000,'^'); text(0,1300,'X');
title('Trajectoire dans le plan de l''orbite')
xlabel('Déplacement radial'); ylabel('Déplacement tangentiel'); grid on
    end
return
```

Fichier solslcq.m

```
% Solution du système linéaire à critère quadratique
function [Psi0, trajX, traju] = solslcq(X0, Tfin, Om, Npoint)
C = matc(Tfin, Om);
Psi0 = -C\X0;
Deltat = Tfin/Npoint;
trajX = X0;
traju = [];
for k=1:Npoint
    t = k*Deltat;
    eAt = expat(t, Om);
    C = matc(t, Om);
    X = eAt*(X0 + C*Psi0);
    eAmt = expat(-t, Om);
    u = Psi0'*eAmt(:,end);
    trajX = [trajX X];
    traju = [traju u];
end
return
```

2.2 Tracés graphiques