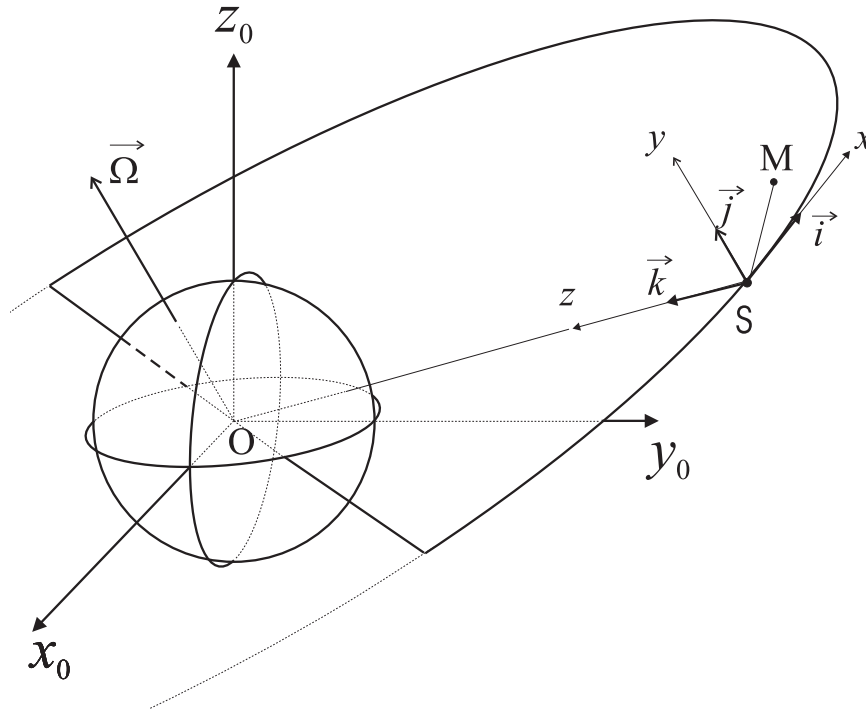


BUREAUX D'ETUDES RENDEZ-VOUS SPATIAL n°1

Soit un satellite S en orbite autour d'une planète de centre O et un module M orbitant à proximité de S.



Définition des repères

Les équations différentielles du mouvement du module M dans le repère orbital local $\{S, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ de la station S s'écrivent (voir Annexe 1) :

$$\begin{aligned} \ddot{x} - 2\omega\dot{z} &= \varphi_x \\ \ddot{y} + \omega^2 y &= \varphi_y \\ \ddot{z} + 2\omega\dot{x} - 3\omega^2 z &= \varphi_z \end{aligned}$$

Les scalaires φ_x , φ_y et φ_z sont les forces spécifiques de propulsion du module (respectivement tangentielle, normale et radiale).

On constate que les mouvements en x et en z sont couplés (mouvement dans le plan de l'orbite), alors que le mouvement en y (normal au plan de l'orbite) est découplé des deux autres. Dans ce qui suit, nous nous intéressons uniquement au mouvement dans le plan de l'orbite :

$$\begin{aligned} \ddot{x} - 2\omega\dot{z} &= \varphi_x \\ \ddot{z} + 2\omega\dot{x} - 3\omega^2 z &= \varphi_z \end{aligned}$$

PREMIERE PARTIE : SLCQ (Système Linéaire Critère Quadratique)

1) Mettre ce système sous forme d'état :

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{B}\mathbf{u}$$

en prenant comme vecteur d'état $\mathbf{X}^T = (z, x, \dot{z}, \dot{x})$ et comme vecteur de commande $\mathbf{u}^T = (\varphi_z, \varphi_x)$.

2) Le système est-il gouvernable en utilisant uniquement :

- a) la poussée radiale φ_z seule ?
- b) la poussée tangentielle φ_x seule ?

On supposera dans ce qui suit qu'une seule des deux poussées est utilisée : laquelle ?

3) Le module M étant à l'instant $t = 0$ dans un état initial mesuré $\mathbf{X}(0) = \mathbf{X}_0$, on désire qu'il réalise un rendez-vous avec la station spatiale à l'instant donné $t = T$. Trouver la trajectoire optimale $\mathbf{X}(t)$ et la commande optimale $\mathbf{u}(t)$ qui réalise ce rendez-vous en $\mathbf{X}(T) = \mathbf{0}$ en minimisant le critère énergétique :

$$\mathcal{E} = \int_0^T \frac{1}{2} (\mathbf{u}^T \mathbf{u}) dt$$

Appliquer littéralement le principe du maximum au SLCQ (système linéaire critère quadratique) et résoudre **littéralement** le problème au deux bouts :

a) Intégrer la trajectoire du vecteur adjoint en fonction de ψ_0 . Donner l'expression de $\psi(t)$ en fonction de \mathbf{A} , t et ψ_0 .

b) Exprimer la commande optimale en boucle ouverte $\mathbf{u}(t)$ en fonction de \mathbf{A} , \mathbf{B} , t et ψ_0 .

c) Intégrer les équations d'état en utilisant l'expression trouvée pour $\mathbf{u}(t)$. Exprimer la trajectoire $\mathbf{X}(t)$ en fonction de \mathbf{A} , \mathbf{B} , t , \mathbf{X}_0 et ψ_0 . Dans cette expression, on posera :

$$\mathbf{C}(t) = \int_0^t e^{-\mathbf{A}\tau} \mathbf{B} \mathbf{B}^T e^{-\mathbf{A}^T \tau} d\tau$$

d) Utiliser la contrainte terminale $\mathbf{X}(T) = \mathbf{0}$ pour résoudre le problème au deux bouts. Exprimer la trajectoire optimale $\mathbf{X}(t)$ et la commande optimale en boucle ouverte $\mathbf{u}(t)$ en fonction de \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} , t , T et \mathbf{X}_0 .

e) Montrer qu'on peut exprimer le revenu $\mathcal{R}(t) = \int_t^T \frac{1}{2} (\mathbf{u}^T \mathbf{u}) dt$ en fonction de $\psi(t)$ et de $\mathbf{X}(t)$. Que pouvez vous vérifier avec cette expression ?

f) Donner l'expression de la commande optimale en boucle fermée $\mathbf{u}(t)$ en fonction de \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} , t , T et $\mathbf{X}(t)$.

4) Préparation du deuxième bureau d'études : On va développer les expressions d'un certain nombre de termes utilisés dans la résolution du deuxième bureau d'études, pour lequel la seule commande utilisée est φ_x . Pour simplifier les expressions des résultats, on utilisera les notations suivantes : θ pour le produit ωt (ou $\omega \tau$), c pour $\cos \theta$ et s pour $\sin \theta$.

a) Développer les expressions de $e^{\mathbf{A}t}$ et $e^{-\mathbf{A}^T t}$. On utilisera le fait le développement en série infinie de $e^{\mathbf{A}t}$, ne fait intervenir que les puissances de \mathbf{A} limitées à l'ordre 3 (Cf. théorème de Cayley-Hamilton).

b) Développer l'expression de $\mathbf{C}(t)$.

c) Préparer les fonctions MATLAB suivantes :

function eAt = expat(t, Om) : Calcul de $e^{\mathbf{A}t}$ en fonction de t et ω .

function C = matc(t, Om) : Calcul de $\mathbf{C}(t)$ en fonction de t et ω .

function [Psi0, trajX, trajU] = solslcq(X0, Tfin, Om, Npoint) : Calcul du vecteur ψ_0 en fonction de \mathbf{X}_0 , T et ω , et calcul des trajectoires correspondantes $\mathbf{X}(t)$ et $\mathbf{u}(t)$ en N instants t équirépartis entre 0 et T .

On pourra tracer ces trajectoires pour les données numériques suivantes : La station spatiale S se trouve sur une orbite de pulsation :

$$\omega = \frac{2\pi}{T_{orb}} \text{ rd/s avec } T_{orb} = 5400 \text{ s}$$

A l'instant $t = 0$, on a $z(0) = 0$, $x(0) = -1000 \text{ m}$, $\dot{z}(0) = 0$ et $\dot{x}(0) = 0$ (le module M se trouve approximativement sur la même orbite que la station spatiale S, 1000 mètres en retard). On désire que le rendez-vous (c'est-à-dire $\mathbf{X}(T) = \mathbf{X}_F = \mathbf{0}$) se réalise à l'instant :

$$T = \frac{1}{4} T_{orb}$$

Annexe. Equations de Clohessy-Whitshire

On pose :

$$\vec{r} = \vec{OS}$$

On suppose le mouvement de S circulaire et uniforme autour de O de vecteur vitesse de rotation $\vec{\Omega}$. Les relations :

$$r = \|\vec{r}\| = \text{cte}, \quad \vec{\Omega} = \text{cte}, \quad \omega = \|\vec{\Omega}\| = \text{cte}, \quad \vec{\Omega} \cdot \vec{r} = 0, \quad \vec{V} = \frac{d}{dt/0} \vec{r} = \vec{\Omega} \times \vec{r}$$

imposent :

$$\vec{\Gamma} = \frac{d}{dt}_{/0} \vec{V} = \frac{d^2}{dt^2}_{/0} \vec{r} = \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}) = -\omega^2 \vec{r}$$

où les dérivations sont effectuées par rapport à une base d'orientation galiléenne \mathcal{B}_0 .

Ce mouvement résulte de l'attraction du point O dont la force spécifique d'attraction sur le satellite S peut être modélisée par :

$$\vec{f} = -\frac{\mu}{r^3} \vec{r}$$

D'où :

$$-\frac{\mu}{r^3} \vec{r} = \frac{d^2}{dt^2} \vec{r} = -\omega^2 \vec{r}$$

implique (3ème loi de Kepler) :

$$\omega^2 = \frac{\mu}{r^3}$$

Considérons un deuxième corps M dans le voisinage de S (M et S sont de masses négligeables devant celle du corps situé en O). Posons :

$$\vec{r}' = \vec{OM} = \vec{OS} + \vec{SM} = \vec{r} + \vec{\varepsilon}$$

Ce corps est soumis à la force spécifique d'attraction :

$$\vec{f}' = -\frac{\mu}{r'^3} \vec{r}'$$

et à une force spécifique de commande $\vec{\phi}$. Il en résulte que :

$$\frac{d^2}{dt^2}_{/0} \vec{r}' = \vec{f}' + \vec{\phi}$$

Soit :

$$\frac{d^2}{dt^2}_{/0} \vec{r} + \frac{d^2}{dt^2}_{/0} \vec{\varepsilon} = \vec{f}' + \vec{\phi}$$

D'où :

$$\frac{d^2}{dt^2}_{/0} \vec{\varepsilon} = \vec{f}' + \vec{\phi} - \vec{f}$$

Ou encore :

$$\frac{d^2}{dt^2}_{/0} \vec{\varepsilon} = \frac{\mu}{r^3} \vec{r} - \frac{\mu}{r'^3} \vec{r}' + \vec{\phi}$$

Considérons le repère local d'origine S et de vecteurs de bases $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ définis par :

$$\begin{aligned} \vec{i} &= \frac{\vec{V}}{\|\vec{V}\|} \\ \vec{k} &= -\frac{\vec{r}}{r} \\ \vec{j} &= \vec{k} \times \vec{i} = -\frac{\vec{\Omega}}{\|\vec{\Omega}\|} \end{aligned}$$

Effectuons un développement limité de \vec{r}' . On a :

$$\begin{aligned} \vec{r}' &= \vec{r} + \vec{\varepsilon} \\ r'^2 &= r^2 + 2\vec{r} \cdot \vec{\varepsilon} + \|\vec{\varepsilon}\|^2 \simeq r^2 + 2\vec{r} \cdot \vec{\varepsilon} \end{aligned}$$

La relation précédente s'écrit :

$$r'^2 \simeq r^2 \left(1 + \frac{2\vec{r}}{r} \cdot \vec{\varepsilon} \right) \simeq r^2 \left(1 - \frac{2\vec{k}}{r} \cdot \vec{\varepsilon} \right)$$

Soit en posant :

$$\vec{\varepsilon} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$r'^2 \simeq r^2 \left(1 - 2\frac{z}{r} \right)$$

D'où :

$$r' \simeq r \left(1 - \frac{z}{r} \right)$$

$$r'^3 \simeq r^3 \left(1 - 3\frac{z}{r} \right)$$

Effectuons un développement limité au premier ordre de $\frac{\mu}{r^3}\vec{r} - \frac{\mu}{r'^3}\vec{r}'$. Il vient :

$$\begin{aligned} \frac{\mu}{r^3}\vec{r} - \frac{\mu}{r'^3}\vec{r}' &\simeq \frac{\mu}{r^3}\vec{r} - \frac{\mu}{r^3} \left(1 + 3\frac{z}{r} \right) (\vec{r} + \vec{\varepsilon}) \\ &\simeq -\frac{\mu}{r^3}\vec{\varepsilon} + 3z\frac{\mu}{r^3}\vec{k} \\ &\simeq \omega^2 \left(3z\vec{k} - \vec{\varepsilon} \right) \end{aligned}$$

Par ailleurs :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}_{/0} \vec{\varepsilon} &= \frac{d}{dt}_{/S} \vec{\varepsilon} + \vec{\Omega} \times \vec{\varepsilon} \\ \frac{d^2}{dt^2}_{/0} \vec{\varepsilon} &= \frac{d}{dt}_{/0} \left(\frac{d}{dt}_{/S} \vec{\varepsilon} \right) + \frac{d}{dt}_{/0} (\vec{\Omega} \times \vec{\varepsilon}) \\ &= \frac{d^2}{dt^2}_{/S} \vec{\varepsilon} + \vec{\Omega} \times \frac{d}{dt}_{/S} \vec{\varepsilon} + \vec{\Omega} \times \frac{d}{dt}_{/0} \vec{\varepsilon} \\ &= \frac{d^2}{dt^2}_{/S} \vec{\varepsilon} + 2\vec{\Omega} \times \frac{d}{dt}_{/S} \vec{\varepsilon} + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{\varepsilon}) \end{aligned}$$

D'où :

$$\frac{d^2}{dt^2}_{/S} \vec{\varepsilon} + 2\vec{\Omega} \times \frac{d}{dt}_{/S} \vec{\varepsilon} + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{\varepsilon}) = \omega^2 \left(3z\vec{k} - \vec{\varepsilon} \right) + \vec{\varphi}$$

Soit en composantes dans $\{S, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$:

$$\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} -\omega\dot{z} \\ 0 \\ \omega\dot{x} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\omega^2 x \\ 0 \\ -\omega^2 z \end{pmatrix} = \omega^2 \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ 2z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varphi_x \\ \varphi_y \\ \varphi_z \end{pmatrix}$$

Ce sont les équations de Clohessy-Whiltshire que l'on écrit :

$$\begin{aligned} \ddot{x} - 2\omega\dot{z} &= \varphi_x \\ \ddot{y} + \omega^2 y &= \varphi_y \\ \ddot{z} + 2\omega\dot{x} - 3\omega^2 z &= \varphi_z \end{aligned}$$

Elles fournissent les équations du mouvement relatif du mobile M par rapport au satellite S en composantes dans le repère orbital local, en fonction de la force spécifique de propulsion $\vec{\varphi}$. Ces équations sont également utilisées pour effectuer des corrections orbitales pour un satellite seul. Dans ce cas, S est la position désirée du satellite et M est sa position effective.