Problème des 2 corps

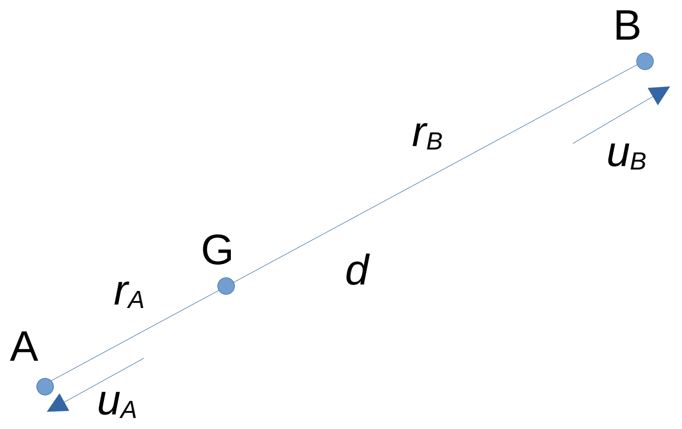
Problème restreint des 3 corps : points de Lagrange

Table des matières

1 Énoncé

On propose dans ce document de montrer comment on retrouve les lois de Kepler à partir de la l'expression de la force d'attraction gravitationnelle donnée par Newton. Les conditions d'applications peuvent s'appliquer au cas du Soleil et d'une planète, ou au cas d'une planète et d'une de ses lunes ou d'un de ses satellites.

Dans une seconde partie nous étudierons le cas particulier des mouvements d'un troisième corps de masse négligeable devant celle des deux premiers, et en particulier ses points d'équilibre relatifs par rapport aux deux autres corps, appelés points de Lagrange.



Considérons deux corps de centres de gravité A et B de masse m_A et m_B situés dans un champ de gravité uniforme[1] $\vec{g}$. On note $d=\|AB\|$ leur distance et $\vec{u}_B=\frac{1}{d}\overrightarrow{AB}$ le vecteur unitaire sur $\overrightarrow{AB}$ vers B et $\vec{u}_A=\frac{1}{d}\overrightarrow{BA}$ le vecteur unitaire sur $\overrightarrow{AB}$ mais vers A (tels que $\vec{u}_A=-\vec{u}_B$).

Loi fondamentale de la dynamique pour le corps A s'écrit :

$$m_A\vec{g}+K\frac{m_A m_B}{d^2}\vec{u}_B \;=\; m_A\vec{\Gamma}_A \qquad (1)$$

et pour le corps B :

$$m_B\vec{g}-K\frac{m_A m_B}{d^2}\vec{u}_B \;=\; m_B\vec{\Gamma}_B \qquad 2)$$

où nous avons préféré n'utiliser que le vecteur unitaire $\vec{u}_B$ dans les deux cas.

2 Accélération d'un corps par rapport à l'autre

Combinons m_A fois l'équation (2) moins m_B fois l'équation (2). Il vient (après division par $m_A m_B$) :

$$-K\frac{m_A+m_B}{d^2}\vec{u}_B \;=\; \vec{\Gamma}_B-\vec{\Gamma}_A$$

Notons :

$$\overrightarrow{\Gamma_{r_{B/A}}}=\vec{\Gamma}_B-\vec{\Gamma}_A$$

l'accélération relative de B par rapport à A. Il en résulte que :

1 c'est-à-dire identique en tous points de la zone où se trouvent A et B, mais sa direction et son intensité peuvent être variables.

$$\overrightarrow{\Gamma_{r_{B/A}}} = -K\frac{m_A+m_B}{d^2}\vec{u}_B \qquad (3)$$

Remarque : En posant $\overrightarrow{\Gamma_{r_{A/B}}}=\vec{\Gamma}_A-\vec{\Gamma}_B$ on obtient :

$$\overrightarrow{\Gamma_{r_{A/B}}} = -K\frac{m_A+m_B}{d^2}\vec{u}_A \qquad (4)$$

Chaque corps a par rapport à l'autre un mouvement d'accélération centrale donnée par les relations (3) ***et*** (4)***. Ce mouvement relatif est totalement indépendant de*** $\vec{g}$.

3 Accélération d'un corps par rapport au centre de gravité G des deux corps

Le centre de gravité G est défini par :

$$m_A\overrightarrow{GA}+m_B\overrightarrow{GB}=0$$

d'où en dérivant :

$$m_A(\vec{V}_A-\vec{V}_G)+m_B(\vec{V}_B-\vec{V}_G)=0 \;\Rightarrow\; m_A\vec{V}_A+m_B\vec{V}_B=(m_A+m_B)\vec{V}_G$$

et en dérivant encore :

$$m_A\vec{\Gamma}_A+m_B\vec{\Gamma}_B=(m_A+m_B)\vec{\Gamma}_G$$

Additionnons les relations (1) et (2). Il vient :

$$(m_A+m_B)\vec{g}=m_A\vec{\Gamma}_A+m_B\vec{\Gamma}_B=(m_A+m_B)\vec{\Gamma}_G$$

soit :

$$\boxed{\vec{\Gamma}_G=\vec{g}}$$

L'accélération du centre de gravité G est égale à la valeur du champ gravitationnel $\vec{g}$.

En utilisant $m_A\overrightarrow{GA}+m_B\overrightarrow{GB}=0$ dans $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{GA}$ on obtient :

$$\overrightarrow{BA} = \frac{m_A}{m_B}\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GA} = \frac{m_A+m_B}{m_B}\overrightarrow{GA} \quad \text{d'où} \quad \overrightarrow{GA} = \frac{m_B}{m_A+m_B}\overrightarrow{BA}$$

Notons $\vec{r}_A=\overrightarrow{GA}$ et $r_A=\|GA\|$. Il vient :

$$r_A = \frac{m_B}{m_A+m_B}d \;\Rightarrow\; d=\frac{m_A+m_B}{m_B}r_A$$

En utilisant $\vec{u}_A=\frac{\overrightarrow{GA}}{\|GA\|}=\frac{\overrightarrow{BA}}{\|BA\|}(=-\vec{u}_B)$ la relation (1) permet d'écrire :

$$m_A \vec{\Gamma}_G + K m_A m_B \frac{m_B^2}{(m_A+m_B)^2 r_A^2}(-\vec{u}_A) = m_A \vec{\Gamma}_A$$

En posant :

$$\overrightarrow{\Gamma_{r_{A/G}}} = \vec{\Gamma}_A - \vec{\Gamma}_G$$

il vient :

$$\overrightarrow{\Gamma_{r_{A/G}}} = -K \frac{m_B}{\left(1+\frac{m_A}{m_B}\right)^2 r_A^2} \vec{u}_A \qquad (5)$$

Remarque : En posant :

$$\overrightarrow{\gamma_{r_{A/G}}} = \vec{\gamma}_A - \vec{\gamma}_G$$

on aurait obtenu :

$$\overrightarrow{\Gamma_{r_{B/G}}} = -K \frac{m_A}{\left(1+\frac{m_B}{m_A}\right)^2 r_B^2} \vec{u}_B \qquad (6)$$

Les deux corps sont entraînés dans le mouvement général du centre de gravité G soumis à l'accélération $\vec{g}$ ***et ils ont relativement à G un mouvement d'accélération centrale donnée par les relations*** (5) ***et*** (6)***, mouvement relatif qui est indépendant de*** $\vec{g}$.

4 Mouvement à accélération centrale

Les quatre équations (3), (4), (5) et (6) qui donnent l'accélération d'un des deux corps, considéré comme le mobile, par rapport à l'autre ou par rapport à leur centre de gravité sont toutes sous la forme :

$$\vec{\Gamma} = -\frac{\mu}{\rho^2}\vec{u} \qquad (7)$$

où :

- $\vec{\Gamma}$ est l'accélération du corps mobile relative à l'autre corps ou à leur centre de gravité
- μ est un paramètre qui vaut :
  - $\mu = K(m_A+m_B)$ dans le cas du mouvement relatif à l'autre corps,
  - $\mu = K\frac{m_B}{\left(1+\frac{m_A}{m_B}\right)^2}$ ou $K\frac{m_A}{\left(1+\frac{m_B}{m_A}\right)^2}$ dans le cas du mouvement relatif à G,
- ρ est la distance du mobile à l'autre corps ou au centre de gravité,

- $\vec{u}$ est le vecteur unitaire dirigé de l'autre corps ou du centre de gravité vers le mobile.

4.1 La deuxième loi de Kepler

Pour étudier ce mouvement, on se place en coordonnées polaires.

Nommons M le point mobile B ou A et nommons O l'autre point, A ou B dans le cas du mouvement relatif à l'autre corps et G dans le cas relatif au centre de gravité. Posons :

$$\overrightarrow{OM}=\rho\vec{u} \quad , \quad \vec{V}=\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t} \quad \text{et} \quad \vec{\Gamma}=\frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t^2}$$

Le moment dynamique par rapport à O des forces extérieurs est nul (inexistant). Il en résulte que le moment cinétique est constant :

$$\overrightarrow{OM}\wedge\vec{V}=\text{cte}$$

Le mouvement reste donc dans le plan défini par O, M et la vitesse initiale $\vec{V}_O$.

Calculons les expressions de $\vec{V}$:

$$\vec{V}=\dot{\rho}\vec{u}+\rho\dot{\vec{u}}$$

$\vec{u}$ étant unitaire $\dot{\vec{u}}$ lui est orthogonal . Notons $\vec{v}$ le vecteur unitaire de $\dot{\vec{u}}$ (orthogonal à $\vec{u}$) et posons $\dot{\vec{u}}=\omega\vec{v}$ où ω est un scalaire quelconque. Comme $\vec{V}=\dot{\rho}\vec{u}+\rho\dot{\vec{u}}$ reste dans un plan, les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ restent dans ce plan fixe.

Notons θ l'angle polaire de $\vec{u}$ par rapport à une direction fixe de ce plan. Quand $\vec{u}$ varie cet angle varie. Écrivons la dérivée composée de $\vec{u}$ par rapport au temps. Il vient :

$$\dot{\vec{u}}=\frac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{d}\theta}\cdot\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=\omega\vec{v}$$

On en déduit par identification que $\frac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{d}\theta}=\vec{v}$ et $\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=\omega$, d'où $\dot{\vec{u}}=\dot{\theta}\vec{v}$ et finalement que :

$$\vec{V}=\dot{\rho}\vec{u}+\rho\dot{\theta}\vec{v}$$

En dérivant encore une fois, il vient :

$$\vec{\Gamma}=\left(\ddot{\rho}-\rho\dot{\theta}^2\right)\vec{u}+\left(\rho\ddot{\theta}+2\dot{\rho}\dot{\theta}\right)\vec{v}$$

En identifiant avec (7) on obtient :

$\rho\ddot{\theta}+2\dot{\rho}\dot{\theta}=0$ qui multiplié par ρ donne $\rho^2\ddot{\theta}+2\rho\dot{\rho}\dot{\theta} \;=\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\rho^2\dot{\theta}\right) \;=\; 0$

c'est-à-dire :

$$\rho^2\dot{\theta}=C=\text{cte} \qquad (8)$$

Or l'aire balayée par unité de temps $\dot{S}$ vaut :

$$\dot{S} \;=\; \frac{1}{2}\rho\cdot\rho\,\dot{\theta} \;=\; \frac{1}{2}\rho^2\dot{\theta}=\frac{C}{2} \;=\text{cte}$$

C'est la ***deuxième loi de Kepler : la vitesse aréolaire (aire balayée balayée par unité de temps) est constante*** :

$$\boxed{\dot{S} \;=\; \frac{C}{2} \;=\; \text{cte}}$$

4.2 Première loi de Kepler

L’énergie cinétique massique du corps vaut $\frac{E_C}{m}=\frac{1}{2}V^2$.

L'énergie potentielle massique du corps vaut $\frac{E_P}{m}=-\int\vec{\Gamma}\cdot\vec{V}\,\mathrm{d}t$ soit :

$$\frac{E_P}{m}=-\int\left(\frac{-\mu}{\rho^2}\dot{\rho}\right)\mathrm{d}t=\mu\int\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho^2}=\frac{-\mu}{\rho}+\text{cte} \quad .$$

Écrivons la conservation de l'énergie massique totale du corps (on suppose que sa masse ne varie pas). Il vient :

$$\boxed{\frac{E_T}{m} \;=\; \frac{1}{2}V^2-\frac{\mu}{\rho} \;=\; h \;=\; \text{cte}} \qquad (9)$$

Le scalaire h est appelé constante des forces vives.

De $\vec{V}=\dot{\rho}\,\vec{u}+\rho\,\dot{\theta}\,\vec{v}$ et (8) on déduit que $V^2=\dot{\rho}^2+\rho^2\dot{\theta}^2=\dot{\rho}^2+\frac{C^2}{\rho^2}$ qui avec (9) donne :

$$\dot{\rho}^2+\frac{C^2}{\rho^2}=2\left(h+\frac{\mu}{\rho}\right)$$

Pour trouver la trajectoire essayons d'éliminer le temps :

Remarquons que la loi des aires permet d'écrire $\rho^2\,\mathrm{d}\theta=C\,\mathrm{d}t$ ce qui permet d'éliminer $\mathrm{d}t$ dans $\dot{\rho}=\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}=C\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho^2\,\mathrm{d}\theta}$. L'expression précédente devient :

$$\frac{C^2}{\rho^4}\left(\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\theta}\right)^2+\frac{C^2}{\rho^2}=2\left(h+\frac{\mu}{\rho}\right)$$

Pour simplifier les notations, posons $\rho'=\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\theta}$ à ne pas confondre avec $\dot{\rho}=\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}$. Il vient :

$$\left(\frac{\rho'}{\rho^2}\right)^2+\frac{1}{\rho^2}=\frac{2}{C^2}\left(h+\frac{\mu}{\rho}\right)$$

Soit en ne mettant que des constantes dans le second membre :

$$\left(\frac{\rho'}{\rho^2}\right)^2+\left(\frac{1}{\rho}-\frac{\mu}{C^2}\right)^2 = \frac{\mu^2}{C^4}+\frac{2h}{C^2} = k^2$$

En posant :

$$f=\frac{1}{k}\left(\frac{1}{\rho}-\frac{\mu}{C^2}\right)$$

cette équation différentielle s'écrit :

$$f'^2+f^2=1$$

En se souvenant que le symbole ' (prime) est une différentielle par rapport à θ son intégrale s'écrit tout simplement :

$$f=\pm\cos(\theta-\theta_O)$$

d'où l'équation de la trajectoire en coordonnées polaires :

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\mu}{C^2}\pm k\cos(\theta-\theta_0)$$

En posant :

$$p=\frac{C^2}{\mu}$$
$$e=\sqrt{1+\frac{2hC^2}{\mu^2}}$$

l'équation s'écrit :

$$\boxed{\rho=\frac{p}{1\mp e\cos(\theta-\theta_0)}}$$

Traditionnellement on ne conserve que la forme avec le signe - au dénominateur, sachant que la forme avec un + correspondrait à utiliser $\theta_O+\pi$ à la place de θ_O)

Si la constante des forces vives $h<0$, c'est-à-dire si l'énergie totale du système est négative, on a $e<1$: ***La trajectoire est une ellipse. C'est la première loi de Kepler.***

Dans la forme standard (avec un signe -), l'angle θ_0 est l'angle polaire qui donne à ρ sa valeur maximale, c'est-à-dire l'angle polaire de l'apogée (si l'autre corps est la Terre), le foyer étant du coté opposé à l'apogée. Dans l'autre forme (avec un + en dénominateur) c'est l'inverse, θ_0 est l'angle polaire du périgée, le foyer étant de son coté.

4.3 Paramètres de l'ellipse

Pour simplifier considérons le cas standard, avec un - au dénominateur et avec $\theta_0=0$.

On a alors $\rho(0)=\frac{p}{1-e}$ et $\rho(\pi)=\frac{p}{1+e}$. Le grand axe est obtenu par :

$$2a=\rho(0)+\rho(\pi)=\frac{p}{1-e}+\frac{p}{1+e}=\frac{2p}{1-e^2}$$

soit :

$$a=\frac{p}{1-e^2} \Leftrightarrow p=a(1-e^2)$$

Notons c l'abscisse du centre de l'ellipse. Il est tel que $c = \rho(0)-a = a-\rho(\pi)$. Il vient :

$$c=\frac{p}{1-e}-a=\frac{a(1-e^2)}{1-e}-a=ae$$
$$c=a-\frac{p}{1+e}=a-\frac{a(1-e^2)}{1+e}=ae$$

d'où :

$$c=a\,e \Leftrightarrow e=\frac{c}{a}$$

Calculons l'ordonnée b du centre de l'ellipse. Son abscisse est obtenue pour l'angle polaire θ donné par :

$$c=a\,e=\frac{pe}{1-e^2}=\rho\cos\theta=\frac{p\cos\theta}{1-e\cos\theta}$$

identité qui implique que $\cos\theta=e$. Il en résulte que b vaut :

$$b=\rho\sin\theta=\frac{p}{1-e^2}\sqrt{1-e^2}=\frac{p}{\sqrt{1-e^2}}$$

On peut vérifier que les trois quantités a, b et c vérifient le théorème de Pythagore :

$$b^2+c^2=a^2$$

en effet :

$$\frac{p^2}{(1-e^2)}+\frac{p^2e^2}{(1-e^2)^2}=\frac{p^2}{(1-e^2)}\left(1+\frac{e^2}{1-e^2}\right)=\frac{p^2}{(1-e^2)^2}=a^2$$

Remarquons que :

$$\frac{b^2}{a}=p=\frac{C^2}{\mu} \tag{10}$$

4.4 La troisième loi de Kepler

Notons T la période de parcours de l'ellipse et $n=\frac{2\pi}{T}$ son *mouvement moyen*. L'aire S de l'ellipse étant donnée par $S=\pi\,a\,b$, la vitesse aréolaire est donnée par :

$$C=2\frac{S}{T}=2\frac{\pi\, ab}{T}=n\,a\,b$$

Il résulte de la relation (10) que :

$$n^2 a^2 b^2=\mu\frac{b^2}{a}$$

soit :

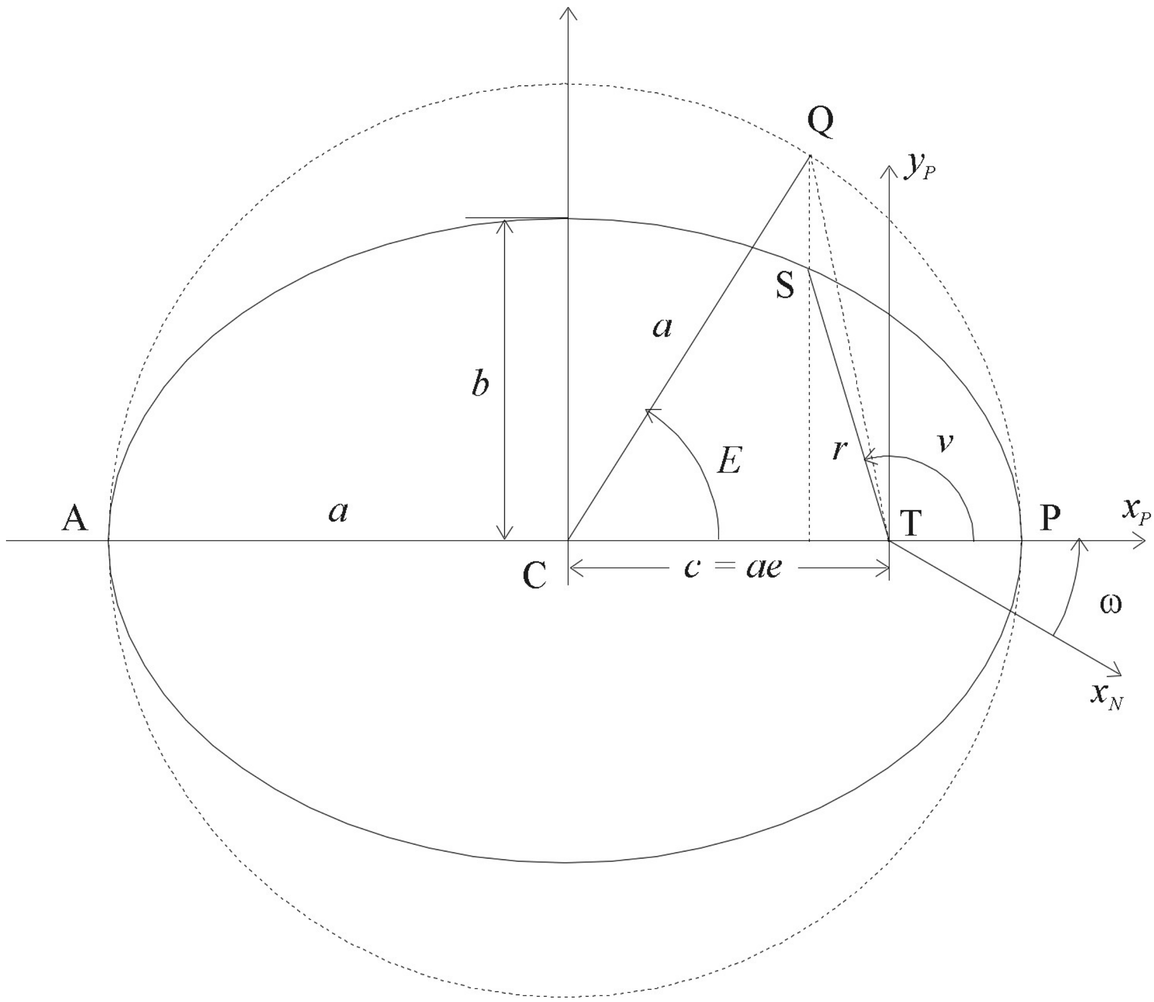
$$\boxed{n^2 a^3=\mu}$$

C'est la ***troisième loi de Kepler. Le carré de la période de révolution est proportionnel au cube du demi grand-axe de l'orbite***.

5 L'équation de Kepler

Pour calculer la position du corps mobile sur l'orbite en fonction du temps, il faut résoudre une équation implicite appelée l'équation de Kepler que nous présentons dans ce chapitre.

La figure correspond au cas avec un + au dénominateur de l'équation polaire. Elle est tracée dans le cas de la Terre T au foyer, avec un satellite S en orbite.



La loi des aires indique que la surface du secteur d'ellipse TPS varie linéairement avec le temps : Notons A_{TPS} cette aire.

L'ellipse se déduit du cercle de centre C et de rayon *a* par une homothétie verticale de rapport *b/a.* Il en résulte que :

$$A_{TPS}=\frac{b}{a}A_{TPQ}$$

où A_{TPQ} est l'aire du secteur intercepté depuis T vers l'arc de cercle PQ. Or cette aire est donnée par :

$$A_{TPQ}=A_{CPQ}-A_{CTQ}$$

où $A_{CPQ}=\frac{1}{2}a^2 E$ est l'aire du secteur circulaire de centre C et d'angle *E*, et où $A_{CTQ}=\frac{1}{2}c\,a\sin E$ est l'aire du triangle CTQ. Il en résulte que :

$$A_{TPS}=\frac{1}{2}\frac{b}{a}(a^2 E-ca\sin E)=\frac{1}{2}ab(E-e\sin E)$$

Or la loi des aires indique que $A_{TPS}=\frac{\pi\,a\,b}{T}(t-t_0)$ d'où la loi de Kepler :

$$\boxed{E-e\sin E=\frac{2\pi}{T}(t-t_0)=M}$$

qui permet de calculer l'***anomalie excentrique E*** en fonction du pseudo-angle *M* appelé ***anomalie moyenne***.

Cette équation n'a pas de solution analytique explicite donnant *E* en fonction de *M* (c'est-à-dire en fonction du temps). On calcule *E* à partir de solutions approchées comme par exemple :

$$E=M+(e-\frac{e^3}{8})\sin M+\frac{e^2}{2}\sin 2M+\frac{3e^3}{8}\sin 3M\cdots$$

ou bien si on cherche une grande précision, par un des nombreux algorithmes itératifs, qui s'initialisent facilement avec *E = M*.

Les coordonnées de *S* s'obtiennent facilement dans le repère d'origine C par une homothétie appliquées au coordonnées de Q. Celles dans le repère d'origine T s'obtiennent en retranchant *ae* à l'abscisse :

$$x=a(\cos E-e)$$
$$y=b\sin E$$

On peut également utiliser les coordonnées polaires à partir de l'***anomalie vraie*** ν .

Les formules qui permettent de calculer ν en fonction de *E* proviennent de la résolution des équations suivantes (expressions des coordonnées en fonction de E et de ν) :

$$x=a(cosE-e)=\frac{p\cos\nu}{1+e\cos\nu}$$
$$y=b\sin E=\frac{p\sin\nu}{1+e\cos\nu}$$

d'où :

$$\cos E = \frac{e + \cos \nu}{1 + e \cos \nu}$$
$$\sin E = \frac{\sqrt{1-e^2} \sin \nu}{1 + e \cos \nu}$$

Les relations réciproques s'écrivent :

$$\cos \nu = \frac{\cos E - e}{1 - e \cos E}$$
$$\sin \nu = \frac{\sqrt{1-e^2} \sin E}{1 - e \cos E}$$

Par ailleurs, on peut montrer que :

$$\tan \frac{\nu}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan \frac{E}{2}$$

6 Les points de Lagrange

En plus des deux corps principaux A et B, on considère un troisième corps M de masse m_M beaucoup plus faible, sans effet sur le mouvement des corps A et B.
On simplifie encore le problème en supposant que les trajectoires des corps A et B sont circulaires.

6.1 Mouvement moyen des corps principaux

Il est évident que le mouvement moyen n du corps A relativement au corps B, ou du corps B relativement au corps A est le même puisque, dans le cas d'orbites circulaires, il est donné par la même formule :

$$n^2 a^3 = \mu = K(m_A + m_B)$$

soit :

$$n = \sqrt{K \frac{(m_a + m_B)}{d^3}}$$

en notant $d = \|AB\|$ la distance des deux corps.

Considérons le centre de G des corps A et B et rappelons que :

$$r_A = \|GA\| \;\;,\;\; r_B = \|GB\| \;\;,\;\; d = r_A + r_B \;\;,\;\; m_A r_A = m_B r_B \;\;\Rightarrow\;\; \frac{m_A}{m_B} = \frac{r_B}{r_A}$$

Par ailleurs :

$$m_A (d - r_B) = m_B r_B \Rightarrow m_A d = (m_A + m_B) r_B \;\;\Rightarrow\;\; m_A + m_B = \frac{m_A}{r_B} d = \frac{m_B}{r_A} d \qquad (11)$$

Notons n_A le mouvement moyen de A autour de G et n_B celui de B. Il est évident qu'ils sont égaux puisque les points AGB sont toujours alignés, mais vérifions le :

$$n_A^2 r_A^3 = \mu_A = K \frac{m_B}{\left(1+\frac{m_A}{m_B}\right)^2} = K \frac{m_B^3}{\left(m_A+m_B\right)^2} \;\Rightarrow\; n_A^2 = K \frac{m_B^3}{r_A^3 \left(m_A+m_B\right)^2}$$

et :

$$n_B^2 r_B^3 = \mu_B = K \frac{m_A}{\left(1+\frac{m_B}{m_A}\right)^2} = K \frac{m_A^3}{\left(m_A+m_B\right)^2} \;\Rightarrow\; n_B^2 = K \frac{m_A^3}{r_B^3 \left(m_A+m_B\right)^2}$$

En utilisant la relation (11), il vient :

$$n_A^2 = K \frac{\left(m_A+m_B\right)}{d^3} = n_B^2$$

identique à la valeur précédemment trouvée.

Remarque : On peut retrouver ce résultat en écrivant que la force d'attraction équilibre la force centrifuge, ce qui n'est vrai que dans le cas d'un mouvement autour du centre de gravité ou dans un repère inertiel (ce qui n'est pas le cas du mouvement de A autour de B ou de celui de B autour de A).

$$m_A n_A^2 r_A = K \frac{m_A m_B}{d^2} = m_B n_B^2 r_B$$

d'où en utilisant la relation (11) :

$$\begin{aligned} n_A^2 &= K \frac{m_B}{r_A d^2} = K \frac{m_B}{\left(\frac{m_B d}{m_A+m_B}\right) d^2} = K \frac{\left(m_A+m_B\right)}{d^3} \\ n_B^2 &= K \frac{m_A}{r_B d^2} = K \frac{m_A}{\left(\frac{m_A d}{m_A+m_B}\right) d^2} = K \frac{\left(m_A+m_B\right)}{d^3} \end{aligned} \qquad (12)$$

6.2 Mouvement du troisième corps

Le mouvement du troisième corps M dans le repère de centre G est régi par l'équation :

$$-K \frac{m_M m_A}{\|AM\|^3} \overrightarrow{AM} - K \frac{m_M m_B}{\|BM\|^3} \overrightarrow{BM} = m_M \overrightarrow{\Gamma_{Mabs}}$$

Écrivons les relations de dérivation dans un repère qui tourne à vitesse de rotation $\vec{\omega} = n \vec{k}$ où $\vec{k}$ est le vecteur unitaire normal au plan de rotation des corps A et B. Il vient :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}_{\text{abs}} \left(\overrightarrow{GM}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}_{\text{rel}} \left(\overrightarrow{GM}\right) + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{GM}$$

que l'on écrit :

$$\overrightarrow{V_{Mabs}}=\overrightarrow{V_{Mrel}}+\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{MC}$$

Dérivons une deuxième fois. Il vient (compte tenu que $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}_{\text{abs}}\vec{\omega}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}_{\text{rel}}\vec{\omega}=0$ car on suppose que le plan de l'orbite est inertiel) :

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}_{\text{abs}}(\overrightarrow{GM})=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}_{\text{rel}}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}_{\text{rel}}(\overrightarrow{GM})+\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{GM}\right)+\vec{\omega}\wedge\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}_{\text{rel}}(\overrightarrow{GM})+\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{GM}\right)$$

soit :

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}_{\text{abs}}(\overrightarrow{GM})=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}_{\text{rel}}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}_{\text{rel}}(\overrightarrow{GM})\right)+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}_{\text{rel}}(\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{GM})+\vec{\omega}\wedge\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}_{\text{rel}}(\overrightarrow{GM})\right)+\vec{\omega}\wedge(\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{GM})$$

soit :

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}_{\text{abs}}(\overrightarrow{GM})=\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}_{\text{rel}}(\overrightarrow{GM})+2\vec{\omega}\wedge\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}_{\text{rel}}(\overrightarrow{GM})\right)+\vec{\omega}\wedge(\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{GM})$$

que l'on écrit :

$$\overrightarrow{\Gamma_{Mabs}}=\overrightarrow{\Gamma_{Mrel}}+2\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{V_{Mrel}}-\omega^2\overrightarrow{GM}$$

D'où l'équation du mouvement relatif dans le repère tournant :

$$-K\frac{m_A}{\|AM\|^3}\overrightarrow{AM}-K\frac{m_B}{\|BM\|^3}\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{\Gamma_{Mrel}}+2\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{V_{Mrel}}-\omega^2\overrightarrow{GM}$$

6.3 Positions d'équilibre

Les positions d'équilibre relatif dans le repère en rotation à la vitesse ω sont des points tels que $\overrightarrow{V_{Mrel}}=\overrightarrow{\Gamma_{Mrel}}=\vec{0}$. Elles sont donc donnés par :

$$-K\frac{m_A}{\|AM\|^3}\overrightarrow{AM_{eq}}-K\frac{m_B}{\|BM\|^3}\overrightarrow{BM_{eq}}+\omega^2\overrightarrow{GM_{eq}}=0$$

Notons $d_A=\|AM\|$, $d_B=\|BM\|$. Il vient :

$$\frac{m_A}{d_{Aeq}^3}\overrightarrow{AM_{eq}}+\frac{m_B}{d_{Beq}^3}\overrightarrow{BM_{eq}}-\frac{(m_A+m_B)}{d^3}\overrightarrow{GM_{eq}}=0$$

Appelons $\vec{i}$ le vecteur unitaire de l'axe des X sur $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{j}$ le vecteur unitaire orthogonal de l'axe des Y, dans le plan de l'orbite, tels que $\vec{\omega}=\omega\vec{k}$ avec $\vec{k}=\vec{i}\wedge\vec{j}$.

Notons X et Y les coordonnées de M dans le repère d'origine G.

Projetons la relation précédente sur l'axe des y. Il vient :

$$\frac{m_A}{d_{Aeq}^3}\overrightarrow{AM_{eq}}\cdot\vec{j}+\frac{m_B}{d_{Beq}^3}\overrightarrow{BM_{eq}}\cdot j-\frac{(m_A+m_B)}{d^3}\overrightarrow{GM_{eq}}\cdot\vec{j}=0$$

Or les ordonnées de A, B et G sont nulles (ils sont tous sur l'axe des x qu'ils définissent). On a donc $\overrightarrow{AM}_{eq}\cdot\vec{j}=\overrightarrow{BM}_{eq}\cdot j=\overrightarrow{GM}_{eq}\cdot\vec{j}=Y_{eq}$. Il en résulte que la projection a pour solution triviale $Y_{eq}=0$ que nous considérerons plus loin.

6.3.1 Points de Lagrange L4 et L5

Pour qu'il existe une solution non triviale, il faut que le facteur de Y soit nul :

$$\frac{m_A}{d_A^3}+\frac{m_B}{d_B^3}-\frac{(m_A+m_B)}{d^3}=0$$

qui a pour solution évidente :

$$d_{Aeq}=d_{Beq}=d$$

S'il y a une position d'équilibre telle que $Y_{eq}\neq 0$, elle correspond donc aux 2 sommets du triangle équilatéral de base AB qu'on appelle points de Lagrange L4 et L5.

6.3.2 Points de Lagrange L1, L2 et L3

Cherchons maintenant les solutions telles que $Y_{eq}=0$.

Examinons la relation vectorielle en projection sur l'axe des X. Il vient :

$$\frac{m_A}{d_A^3}\overrightarrow{AM}_{eq}\cdot\vec{i}+\frac{m_B}{d_B^3}\overrightarrow{BM}_{eq}\cdot i-\frac{(m_A+m_B)}{d^3}\overrightarrow{GM}_{eq}\cdot\vec{i}=0$$

Or $\overrightarrow{GM}\cdot\vec{i}=X$, $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{i}=r_A+X$ et $\overrightarrow{BM}\cdot i=X-r_B$ d'où :

$$\frac{m_A}{d_{Aeq}^3}(r_A+X_{eq})+\frac{m_B}{d_{Beq}^3}(X_{eq}-r_B)-\frac{(m_A+m_B)}{d^3}X_{eq}=0$$

Dans ce qui suit, on omet les indices "eq" pour simplifier l'écriture.

Comme $d_A=|r_A+X|$ et $d_B=|X-r_B|$ on a :

$$\frac{m_A}{(r_A+X)|r_A+X|}+\frac{m_B}{(X-r_B)|X-r_B|}-\frac{(m_A+m_B)}{d^3}X=0$$

En supposant $m_B<m_A$, pour obtenir une équation sans dimensions on pose $z=\frac{X}{d}$ et :

$$\alpha=\frac{m_B}{m_A+m_B}\Rightarrow\frac{m_A}{m_A+m_B}=1-\alpha\ ,\ \frac{r_A}{d}=\alpha\ \text{et}\ \frac{r_B}{d}=1-\alpha$$

d'où l'équation à résoudre :

$$(1-\alpha)(z-1+\alpha)|z-1+\alpha|+\alpha(z+\alpha)|z+\alpha|-z(z+\alpha)|z+\alpha|(z-1+\alpha)|z-1+\alpha|=0$$

Dans tous les cas on tombe sur une équation polynomiale de degré 5 en z, pour laquelle il n'y a pas de solution analytique (cf. Évariste Gallois). On doit donc faire appel à un algorithme de résolution numérique pour trouver une solution.

Il faut considérer 3 cas :

a) **Point de Lagrange L3** : M extérieur au segment AB, du coté de A, alors $z+\alpha \leq 0$ et $z-1+\alpha<0$ d'où l'équation :

$$F_3(z)=-(1-\alpha)(z-1+\alpha)^2-\alpha(z+\alpha)^2-z(z+\alpha)^2(z-1+\alpha)^2=0$$

b) **Point de Lagrange L1** : M entre A et B, alors $z+\alpha \geq 0$ et $z-1+\alpha \leq 0$ d'où l'équation :

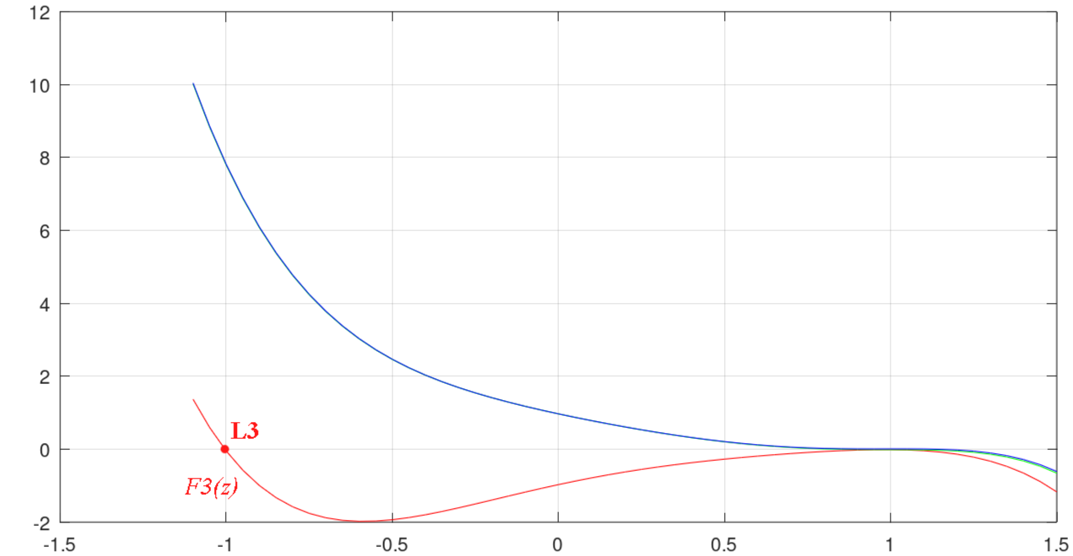
$$-F_1(z)=-(1-\alpha)(z-1+\alpha)^2+\alpha(z+\alpha)^2+z(z+\alpha)^2(z-1+\alpha)^2=0$$

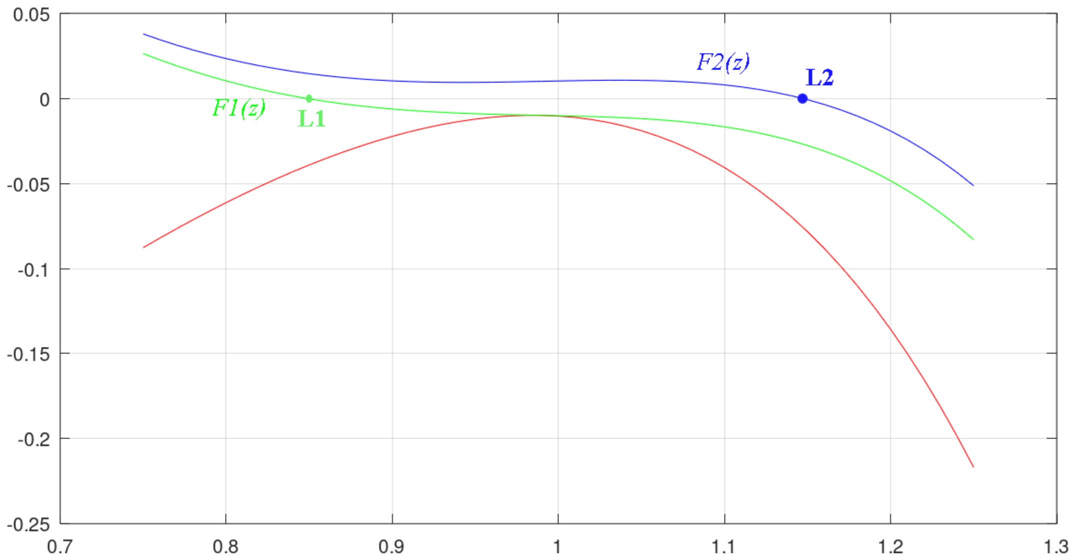
c) **Point de Lagrange L2** : M extérieur au segment AB, du coté de B, alors $z+\alpha>0$ et $z-1+\alpha \geq 0$ d'où l'équation :

$$F_2(z)=(1-\alpha)(z-1+\alpha)^2+\alpha(z+\alpha)^2-z(z+\alpha)^2(z-1+\alpha)^2=0$$

Pour ces 3 équations on a $F(-\infty)=\infty$ et $F(\infty)=-\infty$. Elles ont donc au moins une solution.

Voici le tracé des trois fonctions $F_1(z)$, $F_2(z)$ et $F_3(z)$ pour α petit (de l'ordre de 1/100).





Chaque fonction n'a qu'une solution. Comme α est petit, G est voisin de A, la solution L3 de $F_3(z)$ qui est au voisinage de $z \simeq -1$, correspond à $\overrightarrow{M_{eqA}} \simeq \overrightarrow{AB}$, la solution L1 de $F_1(z)$ qui est légèrement inférieure à 1 correspond à $\overrightarrow{AM_{eq}} \lesssim \overrightarrow{AB}$ et la solution de L2 de $F_2(z)$ qui est légèrement supérieure à 1 correspond à $\overrightarrow{AM_{eq}} \gtrsim \overrightarrow{AB}$.

On a les approximations suivantes :

$$\overline{GL_1} \simeq r_B - \left(\frac{\alpha}{3}\right)^{\frac{1}{3}} d$$
$$\overline{GL_2} \simeq r_B + \left(\frac{\alpha}{3}\right)^{\frac{1}{3}} d$$
$$\overline{GL_3} \simeq -d\left(1+\frac{5\alpha}{12}\right)$$

6.3.3 Stabilité des points d'équilibre

L'étude de la stabilité des points L1, L2 et L3 est complexe car l'expression de leur abscisse n'est pas analytique. Nous ne la considérerons pas ici. Il s'avère que ces positions sont instables, mais malgré tout elles sont intéressantes car, au point d'équilibre il n'y a aucune énergie à dépenser pour y rester et il faut dépenser très peu d'énergie pour y revenir si on ne s'en éloigne peu.

Étudions maintenant l'équilibre des positions L4 et L5. Elles correspondent à l'équation différentielle ci-après :

$$K\frac{m_A}{\|AM\|^3}\overrightarrow{AM}+K\frac{m_B}{\|BM\|^3}\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{\Gamma_{Mrel}}+2\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{V_{Mrel}}-\omega^2\overrightarrow{GM}=0$$

Écrivons l'équation aux petits mouvements autour des positions d'équilibre. Il vient :

$$K\,m_A\left(\frac{1}{d^3}\Delta[\overrightarrow{AM}]+\Delta\left[\frac{1}{d_A^3}\right]\overrightarrow{AM_{eq}}\right)+K\,m_B\left(\frac{1}{d^3}\Delta[\overrightarrow{BM}]+\Delta\left[\frac{1}{d_B^3}\right]\overrightarrow{BM_{eq}}\right)+\overrightarrow{\Gamma_{Mrel}}+2\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{V_{Mrel}}-\omega^2\Delta[\overrightarrow{GM}]=0$$

A, B et G étant fixes dans l'étude de l'équilibre relatif, on a :

$$\Delta[\overrightarrow{AM}]=\Delta[\overrightarrow{BM}]=\Delta[\overrightarrow{GM}]=\overrightarrow{\Delta M}$$

d'où en regroupant les termes :

$$\left(K\frac{(m_A+m_B)}{d_B^3}-\omega^2\right)\overrightarrow{\Delta M}+K\,m_A\,\Delta\left[\frac{1}{d_A^3}\right]\overrightarrow{AM_{eq}}+K\,m_B\,\Delta\left[\frac{1}{d_B^3}\right]\overrightarrow{BM_{eq}}+\overrightarrow{\Gamma_{Mrel}}+2\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{V_{Mrel}}=0$$

Le premier facteur est nul. Par ailleurs, en supposant que $m_A > m_B$ on a :

$$\overrightarrow{AM}=(r_A+X)\vec{i}+Y\vec{j} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{BM}=(r_B-X)\vec{i}+Y\vec{j}$$

d'où :

$$d_A^2=(r_A+X)^2+Y^2 \quad \text{et} \quad d_B^2=(r_B-X)^2+Y^2$$

et :

$$\Delta[d_A^{-3}]=\Delta\left[\left((r_A+X)^2+Y^2\right)^{-3/2}\right]=-\frac{3}{2}d_A^{-5}\left(2(r_A+X)\Delta X+2Y\Delta Y\right)$$
$$\Delta[d_B^{-3}]=\Delta\left[\left((r_B-X)^2+Y^2\right)^{-3/2}\right]=-\frac{3}{2}d_B^{-5}\left(-2(r_B-X)\Delta X+2Y\Delta Y\right)$$

A l'équilibre on a $d_{Aeq}=d_{Beq}=d$, $r_A+X_{eq}=r_B-X_{eq}=\frac{d}{2}$, $Y_{eq}=\pm d\frac{\sqrt{3}}{2}$ d'où :

$$\Delta[d_A^{-3}]=-\frac{3}{2}d^{-4}(\Delta X+\sqrt{3}\Delta Y)$$
$$\Delta[d_B^{-3}]=-\frac{3}{2}d^{-4}(-\Delta X+\sqrt{3}\Delta Y)$$

Reportons ces valeurs dans l'équation aux petits mouvements, projetée sur les axes de base. Il vient, en notant $x=\Delta X$ et $y=\Delta Y$:

$$-\frac{3}{2}K\frac{m_A}{d^4}(x+\sqrt{3}\,y)\begin{pmatrix}\frac{d}{2}\\ \frac{d\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}-\frac{3}{2}K\frac{m_B}{d^4}(-x+\sqrt{3}\,y)\begin{pmatrix}\frac{-d}{2}\\ \frac{d\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\ddot{x}\\ \ddot{y}\end{pmatrix}+2\omega\begin{pmatrix}-\dot{y}\\ \dot{x}\end{pmatrix}=0$$

soit :

$$\begin{aligned}\ddot{x}-2\omega\,\dot{y}-\frac{3}{4}K\frac{(m_A+m_B)}{d^3}x+\frac{3\sqrt{3}}{4}K\frac{(m_B-m_A)}{d^3}y &= 0\\ \ddot{y}+2\omega\,\dot{x}+\frac{3\sqrt{3}}{4}K\frac{(m_B-m_A)}{d^3}x-\frac{9}{4}K\frac{(m_A+m_B)}{d^3}y &= 0\end{aligned}$$

Les relations (12) donnent $\frac{K}{d^3}(m_A+m_B)=\omega^2$ et $\frac{K}{d^2}(m_B-m_A)=\omega^2(r_A-r_B)$ d'où :

$$\begin{aligned}\ddot{x}-2\omega\,\dot{y}-\frac{3}{4}\omega^2x-\frac{3\sqrt{3}}{4}\omega^2\frac{(r_B-r_A)}{d}y &= 0\\ \ddot{y}+2\omega\dot{x}-\frac{3\sqrt{3}}{4}\omega^2(r_B-r_A)x-\frac{9}{4}\omega^2y &= 0\end{aligned}$$

On utilise le calcul opérationnel (transformée de Laplace) qui consiste à cherche une solution de type exponentiel :

$$\begin{aligned}x&=X(p)e^{pt}\\ y&=Y(p)e^{pt}\end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{pmatrix}\left(p^2-\frac{3}{4}\omega^2\right) & -\left(2\omega\,p+\frac{3\sqrt{3}}{4}\lambda\,\omega^2\right)\\ \left(2\omega\,p-\frac{3\sqrt{3}}{4}\lambda\,\omega^2\right) & \left(p^2-\frac{9}{4}\omega^2\right)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X(p)\\ Y(p)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$$

où on a posé :

$$\lambda=\frac{(r_B-r_A)}{d}$$

Pour qu'il y ait une solution non triviale (autre que $X(p)=Y(p)=0$), il faut que le déterminant du système soit nul, soit :

$$p^4+\omega^2 p^2+\frac{27}{4}\frac{r_A r_B \omega^4}{d^2}=0$$

(compte tenu du fait que $1-\lambda^2=4\frac{r_A r_B}{d^2}$).

Il admet pour solutions :

$$p^2=-\frac{\omega^2}{2}\left(1\pm\sqrt{1-27\frac{r_A r_B}{d^2}}\right)$$

Si $d^2>27 r_A r_B$, les solutions en p^2 sont réelles négatives, ce qui signifie que les solutions en p sont imaginaires et que les petits mouvements sont conservatifs, ce qui correspond à une stabilité du point de vue des mécaniciens (mais pas des automaticiens). Dans le cas contraire les solutions en p^2 sont complexes, ce qui signifie que les solutions en p également l'une à partie réelle négative (convergente), mais l'autre à partie réelle positive (divergente).

Comme $d=r_A+r_B$ la condition de stabilité s'écrit $r_A^2+r_B^2-25 r_A r_B>0$ soit :

$$\rho^2-25\rho+1>0$$

où on a posé : $\rho=\frac{m_A}{m_B}=\frac{r_B}{r_A}$.

L'équation du deuxième degré en ρ a deux racines inverses l'une de l'autre (produit = 1) une voisine de 25 (24.96 plus précisément) et l'autre voisine de 1/25. Le radical est positif à l'extérieur de ces deux valeurs.

Ainsi les points L4 et L5 sont stables si un des deux rapports des masses est supérieur à 25, ce qui est le cas des systèmes Terre - Lune et Soleil - planète, pour toutes les planètes.