# Les nombres complexes

Les nombres complexes sont tout simplement des nombres dont une partie est imaginaire, au sens propre, comme dans la fable de La Fontaine sur la laitière et le pot au lait : ils ne correspondent pas à des éléments physiques matériels. Ils font partie de notre imagination, de nos concepts.

## Historique

Les nombres complexes sont apparus au XVI$^{e}$ siècle en Italie avec le mathématicien Niccolo Fontana dit **Tartaglia** qui a trouvé la solution de l'équation du troisième degré vers 1526, puis Jérôme **Cardan** qui a publié cette solution dans ***Ars Magma*** en 1545 puis Raphaël **Bombelli** a contribué à la compréhension des solutions complexes de cette équation dans son traité ***L'Algebra*** publié en 1572. A cette époque on n'utilisait pas encore des lettres comme *a*, *b*, *x* dans les énoncés des problèmes et de leurs solutions. On désignait les éléments par leur nom effectif, par exemple "le coté du rectangle" au lieu de dire *a* ou *b* ou *x*. Les énoncés des solutions étaient particulièrement lourds. Exemple : Un extrait de la méthode de la résolution de l'équation du troisième degré par Tartaglia :

| Énonce original | Traduction | Représentation symbolique |
|---|---|---|
| Quando chel cubo con le cose appresso | Quand ce cube avec des choses en dessous | $x^3+px$ |
| Se agguaglia à qualche numero discreto | Est équivalent à un nombre discret | $=q$ |
| Trovan dui altri differenti in esso. | On en trouve (cherche) deux autres différents. | $u-v=q$ |
| Dapoi terrai, questo per consueto | Ensuite, vous garderez cela comme d'habitude | |
| Che 'l loro produtto sempre sia eguale | Que leur produit est toujours le même | $uv=\left(\frac{p}{3}\right)^3$ |
| Al terzo cubo delle cose neto, | Au troisième cube des choses nettes | |
| El residuo poi suo generale | Le résidu puis le général | |
| Delli lor lati cubi ben sottratti | De leurs cotés cubiques bien soustraits | $\sqrt[3]{u}-\sqrt[3]{v}=x$ |
| Varrà la tua cosa principale | Cela vaudra votre principal | |

Peu après, en 1591, le mathématicien français **François Viette** introduit la notation symbolique dans son ouvrage ***In Artem analyticem isagoge*** utilisant des lettres comme *a*, *b* pour désigner les différents éléments et en 1637 **René Descartes** popularise l'emploi des lettres *a, b, c*... pour les paramètres et des lettres *x, y, z*... pour les inconnues dans son ouvrage ***La Géométrie***, appendice au ***Discours de la méthode***.

# Exemple numérique classique

Bien qu'historiquement liés à l'équation du troisième degré, il est plus simple de présenter les nombres complexes dans l'étude des solutions de l'équation du second degré.

Considérons l'exemple suivant. On dispose de 20 mètres linéaires de plinthes et de 29 mètres carrés de carrelage, et on se demande quelles seraient les dimensions *a* et *b* de la pièce rectangulaire que l'on pourrait carreler avec ce carrelage et ceinturer avec les plinthes. Les cotés sont ainsi solutions des équations suivantes :

$$2(a+b)=20 \Rightarrow a+b=S=10$$
$$a \times b=P=29$$

Ils sont donc solutions de l'équation du second degré $x^2-Sx+P=0$ c'est-à-dire :

$$x^2-10x+29=0$$

dont les solutions sont :

$$x=\frac{S}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{S}{2}\right)^2-P}$$

c'est-à-dire :

$$x=5\pm\sqrt{25-P}=5\pm\sqrt{-4}$$

Avec $P$ = 29 m$^2$ il n'y a pas de solution. Essayons avec différentes valeurs de P. On trouve les solutions suivantes :

| $P = a \times b$ (m$^2$) | $a$ | $b$ | $L = 2S = 2(a+b)$ (m) |
|---|---|---|---|
| 0 | 10 | 0 | 20 |
| 9 | 9 | 1 | 20 |
| 16 | 8 | 2 | 20 |
| 21 | 7 | 3 | 20 |
| 24 | 6 | 4 | 20 |
| 25 | 5 | 5 | 20 |
| 26 | $5+\sqrt{(-1)}$ | $5-\sqrt{(-1)}$ | 20 |
| 29 | $5+\sqrt{(-4)}$ | $5-\sqrt{(-4)}$ | 20 |
| 34 | $5+\sqrt{(-9)}$ | $5-\sqrt{(-9)}$ | 20 |

Ainsi avec nos 20 mètres linéaires de plinthes on ne pas clôturer une pièce de plus de 25 m$^2$ qui sera un carré de 5 m × 5 m. On peut clôturer des surfaces plus petites, par exemple une pièce rectangulaire de 8m × 2m qui fait16 m$^2$.

Si avec nos 29 m$^2$ on pave un carré de 5 m × 5 m, il nous reste 4 m$^2$ qui peuvent être utilisés pour paver un carré IMAGINAIRE de 2 m × 2 m **qui ne sera pas clôturé.** Cette solution s'écrit :

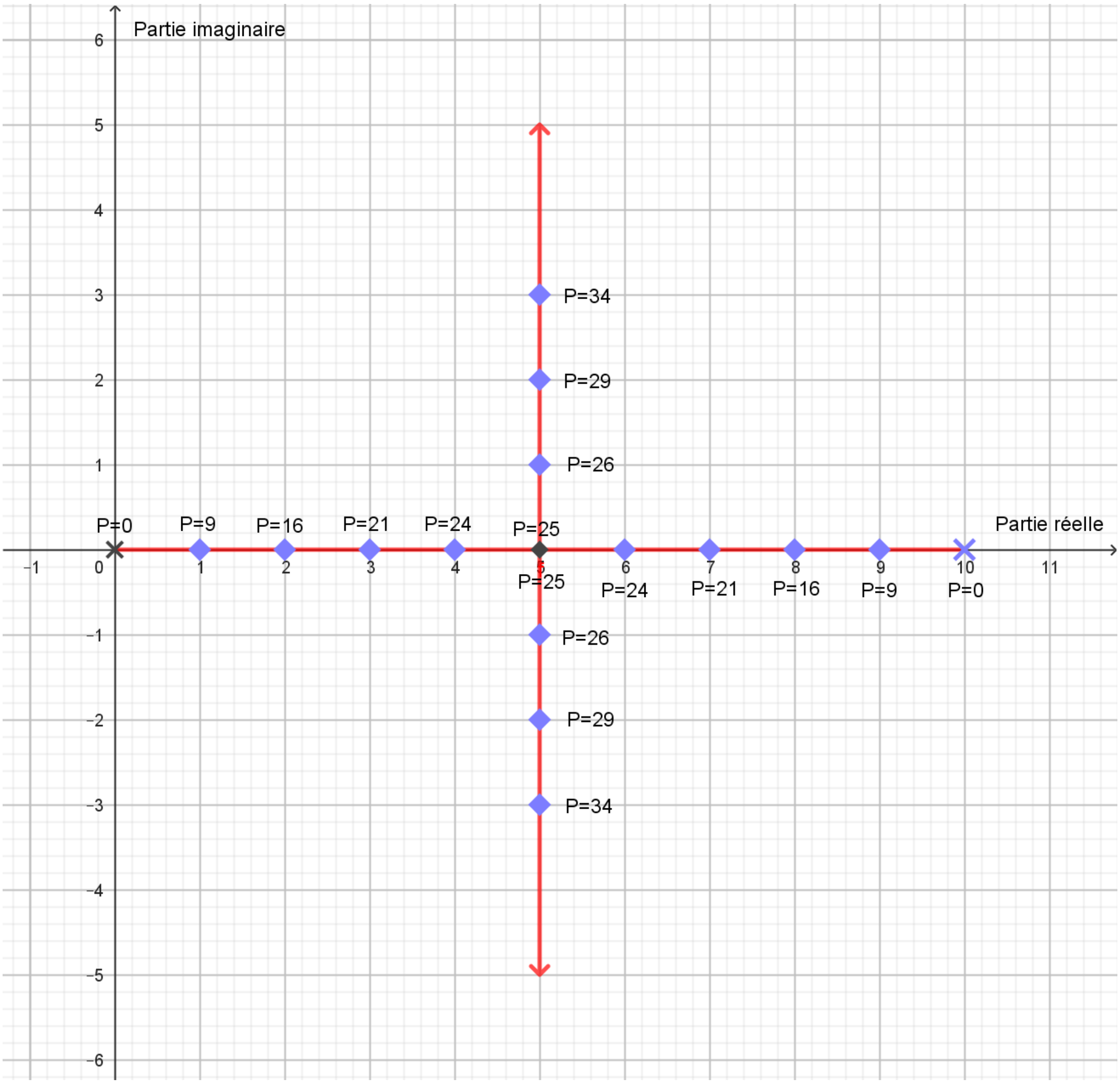
$$a=5+2i \quad , \quad b=5-2i$$

sous forme de *nombres complexes* ayant une partie réelle (5) et une *partie imaginaire* (2): le petit ***i*** signifie "partie imaginaire". Elle est imaginaire au sens propre. Physiquement, elle ne répond pas à notre problème et ne correspond à rien. Cependant elle nous donne comme indication qu'avec le surplus on pourrait carreler un carré de 2 m × 2 m (qui ne serait pas clôturé).

## Autre exemple qualitatif

Il y a toutefois des problèmes où on peut donner un sens physique à cette partie imaginaire, comme dans l'étude du mouvement d'une masse suspendue par un ressort et un amortisseur. La trajectoire solution de l'équation différentielle du mouvement est une somme de deux exponentielles vers la position d'équilibre avec d'éventuelles oscillations. Les inverses des constantes de temps des deux exponentielles sont solutions d'une équation du second degré. Les solutions réelles donnent deux constantes de valeurs différentes dont la plus grande correspond grossièrement à la constante de temps perçue pour rejoindre la position d'équilibre. Les solutions complexes ont des parties imaginaires dont la valeur correspond (à un facteur multiplicatif près) à la fréquence des oscillations de la masse, oscillations qui sont plus ou moins amorties avec la constante de temps donnée par la partie réelle. Ainsi on donne un sens physique à la partie imaginaire, mais ce sens physique ne correspond pas à un élément physique matériel car on ne peut pas toucher un mouvement. C'est un concept abstrait qu'on utilise pour décrire l'évolution des positions en fonction du temps. Sur une photo instantanée de la masse, on ne pourra voir ni la constante de temps d'amortissement (partie réelle de la solution), ni la fréquence (partie imaginaire). Et si on augmente le temps de pose de la photo, on aura un bougé. Par contre, notre cerveau, alimenté par une certaine durée de vision réelle ou par la vision de la succession des images d'un film, va reconnaître les deux concepts abstraits (s'il les a appris) que sont la constante de temps et la fréquence.

# Le plan complexe




Considérons les solutions de notre problème de carrelage, et représentons les résultats obtenus pour les longueurs des cotés dans un plan *x,y* où on place sur l'axe des *x* les parties réelles des longueurs solutions et sur l'axe des *y* les longueurs des parties imaginaires. Ce plan est appelé le plan complexe. Nous avons fait figurer par deux croix (×) les solutions du cas $P = 0$ ($a = 0$ et $b = 10$), puis par des losanges (◊) les solutions pour les autres valeurs de P.

Nous avons tracé en rouge le parcours des valeurs *a* et *b* lorsque P varie.

Ce parcours est appelé le lieu des racines. La racine *a* part de 0 pour $P = 0$ et arrive en 5 pour $P = 25$. La racine *b* part de 10 pour $P = 0$ et arrive en 5 pour $P = 25$ où b = *a* (racine dite double).

Pour $P > 25$ les parties réelles de *a* et *b* restent égales à 5 et les parties imaginaires sont égales et opposées, et valent ±1 pour $P = 26$, ±2 pour $P = 29$, ±3 pour $P = 34$....

Ce plan est très utilisé pour l'étude de la stabilité des systèmes dynamiques. Pour un système dynamique complexe (compliqué), le nombre de points solutions peut être très élevé (2 c'est le cas le plus simple d'une masse unique en mouvement, sans retards de mesure...) Les valeurs des inverses des constantes de temps des exponentielles qui modélisent les divers mouvements sont sur l'axe réel et les fréquences des oscillations sont sur l'axe imaginaire. Les points solutions (les losanges) se déplacent en fonction d'un paramètres de réglage (comme P dans l'exemple précédent). On cherche à donner au paramètre de réglage une valeur telle que pour cette valeur du paramètre tous les points solutions soient dans le demi plan à partie réelle négative pour que les exponentielles soient amorties et non pas divergentes, et d'autre part on cherche également à ce que les parties imaginaires soient nulles ou les plus petites possibles pour qu'il n'y ait pas ou peu d'oscillations.

# L'algèbre des nombres complexes

Je ne ferais qu'aborder ce sujet.

Grossièrement, on appelle algèbre un groupe d'éléments qui ont les mêmes propriétés que les nombres réels ordinaires : à savoir, on peut les additionner, les multiplier, les diviser (sauf par 0) et le résultat de ces opérations est un élément comme les autres.

Pour que les nombre complexes constituent une algèbre, il faut donc définir leur addition, leur multiplication, leur division...

En ce qui concerne l'addition et la soustraction, on fait tout simplement l'opération sur chaque partie, ce qui revient dans le plan complexe à l'addition des vecteurs associés aux points représentant chaque nombre complexe.

La multiplication est plus laborieuse. Faisons en une sans nous poser de question :

$$(a+ib)(c+id)=ac+iad+ibc+i^2bd=ac+i^2bd+i(ad+bc)$$

Ici intervient la quantité $i^2$ . Précédemment nous avions posé $\sqrt{-1}=\pm 1i$ , $\sqrt{-4}=\pm 2i$ , $\sqrt{-9}=\pm 3i$ .. c'est-à-dire, dans tous les cas, en élevant au carré :

$$i^2=-1$$

valeur que nous utilisons dans notre multiplication et qui nous donne :

$$(a+ib)(c+id)=ac-bd+i(ad+bc)$$

Cette formule n'est pas très compliqué mais il est inutile de la retenir car elle est très facile à retrouver.

En posant $ac-bd=1$ et $ad+bc=0$ et en résolvant en (*c,d*) ou en (*a,b*) on trouve l'inverse de l'autre élément. Ainsi pour l'inverse de $a+ib$ , on trouve $\dfrac{a-ib}{a^2+b^2}$ , à savoir le symétrique par rapport à l'axe des réels (on l'appelle le conjugué) divisé par sa norme (carré du module).

Il serait intéressant d'examiner les propriétés géométriques comme le module de $a+ib$ qui vaut $\sqrt{(a^2+b^2)}$ , son argument qui vaut $\arctan(\frac{y}{x})$ , montrer les propriétés géométriques de la multiplication (multiplication des modules et addition des arguments), mais il faut bien arrêter quelque part !