Pendule de Foucault

M. Llibre, avril 2020

Table des matières

Sujet

Étude simplifiée du pendule de Foucault. On considère la masse m d'un pendule de longueur l , située au point M, soumise uniquement à la force d'attraction de la Terre $\overrightarrow{F}$ et à la réaction $\overrightarrow{S}$ de la tension du fil de suspension. On néglige le frottement de l'air.

1 Étude par le formalisme de Newton

La loi fondamentale de la dynamique s'écrit dans ce cas :

$$\overrightarrow{F} + \overrightarrow{S} = m\overrightarrow{\gamma_{abs}}$$

où $\overrightarrow{\gamma_{abs}}$ est l'accélération de la masse dans un référentiel galiléen. Un repère ayant son origine sur l'axe de rotation de la Terre et des axes qui ne tournent pas par rapport aux étoiles peut être considéré comme galiléen. En notant $\overrightarrow{V_r}$ et $\overrightarrow{\gamma_r}$ les vitesse et accélération relatives du point M dans un repère local, $\overrightarrow{\Omega}$ la vitesse de rotation de la croute terrestre par rapport au repère galiléen, et O un point sur l'axe de rotation de la Terre, l'accélération $\overrightarrow{\gamma_{abs}}$ et ces quantités sont reliées par la relation :

$$\overrightarrow{\gamma_{abs}} = \overrightarrow{\gamma_r} + \overrightarrow{\Omega} \wedge \left(\overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM}\right) + 2\overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{V_r} \tag{1}$$

où $\overrightarrow{A_c} = 2\overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{V_r}$ est l'accélération de Coriolis et où $\overrightarrow{\Gamma_c} = \overrightarrow{\Omega} \wedge \left(\overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM}\right)$ est l'accélération centripète. On remarquera que ce dernier vecteur est orthogonal à l'axe de rotation de la Terre et dirigé vers lui, et qu'il est indépendant du choix du point O sur l'axe.

Il vient :

$$\overrightarrow{F} - m\overrightarrow{\Omega} \wedge \left(\overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM}\right) + \overrightarrow{S} = m\left(\overrightarrow{\gamma_r} + +2\overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{V_r}\right)$$

A l'équilibre $\overrightarrow{V_r} = \overrightarrow{\gamma_r} = \overrightarrow{0}$ d'où :

$$\overrightarrow{F} - m\overrightarrow{\Omega} \wedge \left(\overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM_0}\right) + \overrightarrow{S} = \overrightarrow{0}$$

Par définition, à l'équilibre, le fil est selon la verticale locale et la réaction est donnée par :

$$\overrightarrow{S_0} = -m\overrightarrow{g}$$

Il en résulte que $\overrightarrow{g}$ et $\overrightarrow{F}$ sont reliées par la relation suivante :

$$m\overrightarrow{g} = \overrightarrow{F} - m\overrightarrow{\Omega} \wedge \left(\overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM_0}\right) \tag{2}$$

Finalement, dans le référentiel local, l'équation du mouvement s'écrit :

$$\overrightarrow{g} + \overrightarrow{s} = \overrightarrow{\gamma_r} + 2\overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{V_r} \tag{3}$$

où, pour simplifier l'écriture, nous avons introduit la réaction massique :

$$\overrightarrow{s} = \frac{1}{m}\overrightarrow{S}$$

Pour étudier les petits mouvements, on considère un repère ayant pour origine le point d'équilibre A avec l'axe $\vec{z}$ selon $-\overrightarrow{g}$, l'axe $\vec{\text{x}}$ vers le sud et l'axe $\vec{y}$ vers l'est dans l'hémisphère nord.

Notons x, y et z les coordonnées de M dans ce repère.

Le point de suspension P du pendule se trouve au point de coordonnées $(0, 0, l)$, car $\overrightarrow{AP}$ est dirigé selon $\vec{z}$ (selon $-\vec{g}$).

On note ω le module du vecteur $\overrightarrow{\Omega}$. Ses composantes s'écrivent :

$$\overrightarrow{\Omega} = \omega \begin{pmatrix} -\cos\lambda \\ 0 \\ \sin\lambda \end{pmatrix}$$

où λ est latitude ***astronomique***. Elle est égale à $\frac{\pi}{2} - \theta$ où θ est l'angle entre la verticale $\vec{z}$ et $\overrightarrow{\Omega}$.

Si on note s le module de $\overrightarrow{s}$ ses composantes s'écrivent :

$$\vec{s} = \frac{s}{l}\begin{pmatrix} -x \\ -y \\ l-z \end{pmatrix}$$

Exprimons les composantes de l'équation vectorielle (3) :

$$\ddot{x} - 2\omega\dot{y}\sin\lambda = -\frac{s}{l}x \tag{4}$$

$$\ddot{y} + 2\omega\dot{x}\sin\lambda + 2\omega\dot{z}\cos\lambda = -\frac{s}{l}y \tag{5}$$

$$\ddot{z} - 2\omega\dot{y}\cos\lambda = \frac{s}{l}(l-z) - g \tag{6}$$

où g est le module de $\overrightarrow{g}$.

Pour résoudre (intégrer) ce système, il faut exprimer l'inconnue s et les 3 inconnues $\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}$ en fonction des variables d'état $x, y, z, \dot{x}, \dot{y}$ et $\dot{z}$. On a 4 inconnues, mais nous n'avons que 3 équations : (4), (5) et (6). La quatrième équation est obtenue en prenant en compte le fait que le point M est assujetti à la contrainte :

$$x^2 + y^2 + (l-z)^2 = l^2 \tag{7}$$

La solution en z avec le point M plus bas que le point d'attache P s'écrit :

$$l - z = \sqrt{l^2 - (x^2 + y^2)} \tag{8}$$

En considérant que $z \ll l$, on en déduit la relation approchée :

$$z \simeq \frac{x^2 + y^2}{2l} \tag{9}$$

qui montre que z est du deuxième ordre par rapport à x et y, et de même $\dot{z}$ est du deuxième ordre par rapport à $\dot{x}$ et $\dot{y}$, et de même $\ddot{z}$ par rapport à $\ddot{x}$ et $\ddot{y}$.

Dans l'équation (6), l'approximation $z \ll l$ permet de tirer une valeur approchée de s au quatrième ordre près :

$$s \simeq (g + \ddot{z} - 2\omega\dot{y}\cos\lambda)\left(1 + \frac{x^2+y^2}{2l^2} + ...\right)$$

qui reportée dans (4), (5) donne :

$$\ddot{x} - 2\omega\dot{y}\sin\lambda + \frac{x}{l}(g + \ddot{z} - 2\omega\dot{y}\cos\lambda)\left(1 + \frac{x^2+y^2}{2l^2} + ...\right) \simeq 0$$
$$\ddot{y} + 2\omega\dot{x}\sin\lambda + 2\omega\dot{z}\cos\lambda + \frac{y}{l}(g + \ddot{z} - 2\omega\dot{y}\cos\lambda)\left(1 + \frac{x^2+y^2}{2l^2} + ...\right) \simeq 0$$

En ne conservant que les termes du 1er ordre, on obtient les équations différentielles du mouvement de M dans le plan horizontal local :

$$\ddot{x} - 2\omega\dot{y}\sin\lambda + \frac{g}{l}x \simeq 0$$
$$\ddot{y} + 2\omega\dot{x}\sin\lambda + \frac{g}{l}y \simeq 0$$

Cette approximation est même exacte au troisième ordre près car nous avons vu que $\ddot{z}$ est un terme du deuxième ordre.

En posant $\xi = x + iy$ on obtient l'équation complexe :

$$\ddot{\xi} + 2i\omega\sin\lambda\dot{\xi} + \frac{g}{l}\xi = 0$$

dont l'équation caractéristique $s^2 + 2i\omega\sin\lambda s + \frac{g}{l} = 0$ a pour racines imaginaires pures $s = i(\omega_1 \pm \omega_2)$, avec :

$$\omega_1 = \omega\sin\lambda = \frac{2\pi}{T_1}$$
$$\omega_2 = \sqrt{\omega_1^2 + \frac{g}{l}} = \frac{2\pi}{T_2}$$

La solution générale s'écrit donc :

$$x = A\cos(\omega_2 t + \varphi)\cos\omega_1 t$$
$$y = A\cos(\omega_2 t + \varphi)\sin\omega_1 t$$

C'est une ellipse parcourue à la période T_2 qui précessionne à la période T_1. Généralement on procède avec des conditions initiales telles que l'ellipse soit extrêmement aplatie et réduite à une ligne.

ω_1^2 est négligeable devant $\frac{g}{l}$ qui définit la période propre T_2 du pendule. Dans le cas de l'expérience de Foucault au Panthéon en 1852, avec $l = 67$m on trouve $T_2 = 16,4s$, pour la période propre et de l'ordre de $86164/\sin 48.85 = 31$h50m (à $\lambda = 48.85°$) pour la période de précession T_1.

2 Retour sur les vitesses et accélérations relatives et absolues

Examinons comment s'établit la relation (1) qui est une relation purement mathématique.

Considérons 3 points quelconques O, A et M, un repère « fixe » d'origine O, et un repère « local » mobile $(\mathrm{A}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ d'origine A.

Calculons la dérivée du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$. On a : $\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{AM}}$, d'où : $\frac{d}{dt_{/0}}\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \frac{d}{dt_{/0}}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{d}{dt_{/0}}\overrightarrow{\mathrm{AM}}$. L'indice /0 mis à l'opérateur $\frac{d}{dt}$ indique que la dérivation est effectuée en considérant que le repère O est fixe.

Considérons les coordonnées (x, y, z) du point M dans le repère local : $\overrightarrow{\mathrm{AM}} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ et calculons la dérivée $\frac{d}{dt_{/O}}\overrightarrow{\mathrm{AM}}$. Il vient :

$$\frac{d}{dt_{/0}}\overrightarrow{\mathrm{AM}} = \left(\frac{d}{dt}x\right)\vec{i} + \left(\frac{d}{dt}y\right)\vec{j} + \left(\frac{d}{dt}z\right)\vec{k} + x\frac{d}{dt_{/0}}\vec{i} + y\frac{d}{dt_{/0}}\vec{j} + z\frac{d}{dt_{/0}}\vec{k}$$

Ici nous n'avons pas mis d'indice /0 aux dérivées des scalaires car la valeur des dérivées $\lim \left(\frac{\Delta s}{\Delta t}\right)_{t\to 0}$ des scalaires est indépendante des repères (avec le temps absolu d'avant la relativité bien sûr). Ainsi nous écrirons :

$$\frac{d}{dt_{/0}}\overrightarrow{\mathrm{AM}} = \dot{x}\vec{\imath} + \dot{y}\vec{\jmath} + \dot{z}\vec{k} + x\frac{d}{dt_{/0}}\vec{\imath} + y\frac{d}{dt_{/0}}\vec{\jmath} + z\frac{d}{dt_{/0}}\vec{k}$$

Les dérivées des constantes scalaires $\vec{\imath}\cdot\vec{\imath} = 1$, $\vec{\jmath}\cdot\vec{\jmath} = 1$ et $\vec{k}\cdot\vec{k} = 1$ étant nulles, on en déduit en les dérivant que $\vec{\imath}\cdot\frac{d}{dt_{/0}}\vec{\imath} = 0$, $\vec{\jmath}\cdot\frac{d}{dt_{/0}}\vec{\jmath} = 0$ et $\vec{k}\cdot\frac{d}{dt_{/0}}\vec{k} = 0$ d'où la forme des composantes des dérivées des vecteurs de base :$\frac{d}{dt_{/0}}\vec{\imath} = a\vec{\jmath} + b\vec{k}$ (pas de composante sur $\vec{\imath}$), $\frac{d}{dt_{/0}}\vec{\jmath} = c\vec{k} + d\vec{\imath}$ (pas de composante sur $\vec{\jmath}$), $\frac{d}{dt_{/0}}\vec{k} = e\vec{\imath} + f\vec{\jmath}$ (pas de composante sur $\vec{k}$).

En dérivant le produit scalaire $\vec{\imath}\cdot\vec{\jmath} = 0$, on obtient $\vec{\imath}\cdot\frac{d}{d_{t/0}}\vec{\jmath} = -j\cdot\frac{d}{dt_{/0}}\vec{\imath}$ d'où $a = -d$. et en dérivant les produits $\vec{\jmath}\cdot\vec{k} = 0$ et $\vec{k}\cdot\vec{\imath} = 0$, on obtient $f = -c$ et $e = -b$. Il n'y a donc que 3 paramètres indépendants que l'on va noter p,q et r.

En posant :

$$\begin{aligned}
p = c = -f = \vec{k}\cdot\frac{d}{dt_{/0}}\vec{\jmath} = -\vec{\jmath}\cdot\frac{d}{dt_{/0}}\vec{k} \\
q = e = -b = \vec{\imath}\cdot\frac{d}{dt_{/0}}\vec{k} = -\vec{k}\cdot\frac{d}{dt_{/0}}\vec{\imath} \\
r = a = -d = \vec{\jmath}\cdot\frac{d}{dt_{/0}}\vec{\imath} = -\vec{\imath}\cdot\frac{d}{dt_{/0}}\vec{\jmath}
\end{aligned}$$

il vient :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt_{/0}}\vec{\imath} &= r\vec{\jmath} - q\vec{k} \\
\frac{d}{dt_{/0}}\vec{\jmath} &= p\vec{k} - r\vec{\imath} \\
\frac{d}{dt_{/0}}\vec{k} &= q\vec{\imath} - p\vec{\jmath}
\end{aligned}$$

D'où :

$$\frac{d}{dt_{/0}}\overrightarrow{\mathrm{AM}} = \dot{x}\vec{\imath} + \dot{y}\vec{\jmath} + \dot{z}\vec{k} + x\left(r\vec{\jmath} - q\vec{k}\right) + y\left(p\vec{k} - r\vec{\imath}\right) + z\left(q\vec{\imath} - p\vec{\jmath}\right)$$

ou encore :

$$\frac{d}{dt_{/0}}\overrightarrow{\mathrm{AM}} = \dot{x}\vec{\imath} + \dot{y}\vec{\jmath} + \dot{z}\vec{k} + (qz - ry)\,\vec{\imath} + (rx - pz)\,\vec{\jmath} + (py - qx)\,\vec{k}$$

Il apparait ainsi que : lorsque l'opérateur $\frac{d}{dt/0}$ est appliqué aux vecteurs de la base $(\mathrm{A}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, il se comporte, sur les composantes des vecteurs exprimés dans cette base, comme un opérateur produit vectoriel $\overrightarrow{\Omega_{A/0}}\wedge$, de composantes (p, q, r). Dans l'enseignement supérieur on l'utilise plutôt sous forme d'un tenseur antisymétrique d'ordre 2. Ce vecteur exprime la vitesse de rotation du repère A par rapport au repère O.

Dans la relation précédente, la première partie $\dot{x}\vec{\imath} + \dot{y}\vec{\jmath} + \dot{z}\vec{k}$ exprime la variation de position du point M dans le repère A. C'est sa vitesse relative au repère local que nous noterons :

$$\frac{d}{dt_{/A}}\overrightarrow{\mathrm{AM}} = \dot{x}\vec{\imath} + \dot{y}\vec{\jmath} + \dot{z}\vec{k} = \overrightarrow{V_{rel}^{M}}$$

où l'indice $/A$ mis à l'opérateur $\frac{d}{dt}$ indique que la dérivation est effectuée en considérant que le repère A est fixe.

Ainsi, la relation devient :

$$\frac{d}{dt_{/0}}\overrightarrow{\mathrm{AM}} = \frac{d}{dt_{/A}}\overrightarrow{\mathrm{AM}} + \overrightarrow{\Omega_{A/0}} \wedge \overrightarrow{\mathrm{AM}} \tag{10}$$

que l'on écrira également :

$$\frac{d}{dt_{/0}}\overrightarrow{\mathrm{AM}} = \overrightarrow{V_{rel}^{M}} + \overrightarrow{\Omega_{A/0}} \wedge \overrightarrow{\mathrm{AM}}$$

Dérivons une deuxième fois cette relation :

$$\frac{d^2}{dt^2_{/0}}\overrightarrow{\mathrm{AM}} = \frac{d}{dt_{/0}}\left(\overrightarrow{V^M_{rel}} + \overrightarrow{\Omega_{A/0}} \wedge \overrightarrow{\mathrm{AM}}\right) \tag{11}$$

Dans cette expression, la dérivée du premier terme s'écrit :

$$\frac{d}{dt_{/0}}\left(\overrightarrow{V^M_{rel}}\right) = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k} + \dot{x}\frac{d}{dt_{/0}}\vec{i} + \dot{y}\frac{d}{dt_{/0}}\vec{j} + \dot{z}\frac{d}{dt_{/0}}\vec{k}$$
$$\frac{d}{dt_{/0}}\left(\overrightarrow{V^M_{rel}}\right) = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k} + \dot{x}\left(r\vec{j} - q\vec{k}\right) + \dot{y}\left(p\vec{k} - r\vec{i}\right) + \dot{z}\left(q\vec{i} - p\vec{j}\right)$$

En posant :

$$\ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k} = \frac{d}{dt_{/A}}\left(\overrightarrow{V^M_{rel}}\right) = \overrightarrow{\gamma^M_{rel}}$$

on fait apparaitre l'accélération relative $\overrightarrow{\gamma^M_{rel}}$ de M dans le repère local A. D'où :

$$\frac{d}{dt_{/0}}\overrightarrow{V^M_{rel}} = \frac{d}{dt_{/A}}\left(\overrightarrow{V^M_{rel}}\right) + \overrightarrow{\Omega_{A/0}} \wedge \overrightarrow{V^M_{rel}} \tag{12}$$

que l'on écrira également :

$$\frac{d}{dt}\overrightarrow{V^M_{rel}} = \overrightarrow{\gamma^M_{rel}} + \overrightarrow{\Omega_{A/0}} \wedge \overrightarrow{V^M_{rel}}$$

Remarque : Les relations (10) et (12) font apparaitre la relation fondamentale de dérivation relative :

$$\boxed{\frac{d}{dt_{/A}}\overrightarrow{W} = \frac{d}{dt_{/B}}\overrightarrow{W} + \overrightarrow{\Omega_{B/A}} \wedge \overrightarrow{W}} \tag{13}$$

qui est valable quelles que soient les bases A et B et quel que soit le vecteur $\overrightarrow{W}$. Il est intéressant de l'appliquer au vecteur $\overrightarrow{\Omega_{B/A}}$ lui-même :

$$\frac{d}{dt_{/A}}\overrightarrow{\Omega_{B/A}} = \frac{d}{dt_{/B}}\overrightarrow{\Omega_{B/A}} + \overrightarrow{\Omega_{B/A}} \wedge \overrightarrow{\Omega_{B/A}}$$

qui montre que :

$$\frac{d}{dt_{/A}}\overrightarrow{\Omega_{B/A}} = \frac{d}{dt_{/B}}\overrightarrow{\Omega_{B/A}} \tag{14}$$

La dérivée du deuxième terme de (11) s'écrit :

$$\frac{d}{dt_{/0}}\left(\overrightarrow{\Omega_{A/0}} \wedge \overrightarrow{\mathrm{AM}}\right) = \left(\frac{d}{dt}\overrightarrow{\Omega_{A/0}}\right) \wedge \overrightarrow{\mathrm{AM}} + \overrightarrow{\Omega_{A/0}} \wedge \frac{d}{dt_{/0}}\overrightarrow{\mathrm{AM}}$$

où nous n'avons pas mis l'indice /0 à $\frac{d}{dt}\overrightarrow{\Omega_{A/0}}$ car $\frac{d}{dt_{/0}}\overrightarrow{\Omega_{A/0}} = \frac{d}{dt_{/A}}\overrightarrow{\Omega_{A/0}}$. D'où :

$$\frac{d}{dt_{/0}}\left(\overrightarrow{\Omega_{A/0}} \wedge \overrightarrow{\mathrm{AM}}\right) = \left(\frac{d}{dt}\overrightarrow{\Omega_{A/0}}\right) \wedge \overrightarrow{\mathrm{AM}} + \overrightarrow{\Omega_{A/0}} \wedge \left(\overrightarrow{V^M_{rel}} + \overrightarrow{\Omega_{A/0}} \wedge \overrightarrow{\mathrm{AM}}\right)$$

et :

$$\frac{d^2}{dt^2_{/0}}\overrightarrow{\mathrm{AM}} = \overrightarrow{\gamma^M_{rel}} + \left(\frac{d}{dt}\vec{\Omega}\right) \wedge \overrightarrow{\mathrm{AM}} + \vec{\Omega} \wedge \left(\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{\mathrm{AM}}\right) + 2\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{V^M_{rel}} \tag{15}$$

où nous avons omis l'indice $A/0$ à Ω pour alléger l'écriture.

Continuons le calcul, sans l'indice $A/0$ à Ω. Nous avons :

$$\frac{d}{dt_{/0}}\overrightarrow{OM} = \frac{d}{dt_{/0}}\overrightarrow{OA} + \frac{d}{dt_{:0}}\overrightarrow{AM}$$

En appliquant (13), on a :

$$\frac{d}{dt_{/0}}\overrightarrow{OA} = \frac{d}{dt_{/A}}\overrightarrow{OA} + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OA}$$

or $\frac{d}{dt_{/A}}\overrightarrow{OA} = -\frac{d}{dt_{/A}}\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{0}$ car O est fixe dans le repère local A. D'où :

$$\frac{d}{dt_{/0}}\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{OA}$$
$$\frac{d}{dt_{/0}}\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{OA} + \frac{d}{dt_{/0}}\overrightarrow{AM}$$

Dérivons une deuxième fois. En prenant en compte la remarque (14), on obtient :

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dt^2_{/0}}\overrightarrow{OM} &= \frac{d}{dt_{/0}}\left(\overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{OA}\right) + \frac{d^2}{dt^2_{/0}}\overrightarrow{AM}\\ &= \overrightarrow{\Omega} \wedge \frac{d}{dt_{/0}}\overrightarrow{OA} + \frac{d^2}{dt^2_{/0}}\overrightarrow{AM}\end{aligned}$$

D'où :

$$\frac{d^2}{dt^2_{/0}}\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{\Omega} \wedge \left(\overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{OA}\right) + \frac{d^2}{dt^2_{/0}}\overrightarrow{AM}$$

qui avec (15) et après factorisation de $\overrightarrow{\Omega} \wedge \left(\overrightarrow{\Omega} \wedge\right)$, permet d'écrire :

$$\frac{d^2}{dt^2_{/0}}\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{\Omega} \wedge \left(\overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM}\right) + \left(\frac{d}{dt}\overrightarrow{\Omega}\right) \wedge \overrightarrow{\mathrm{AM}} + 2\overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{V^M_{rel}} + \overrightarrow{\gamma^M_{rel}}$$

En posant :

$$\overrightarrow{\gamma^M_{abs}} = \frac{d^2}{dt^2_{/0}}\overrightarrow{OM}$$

il vient :

$$\overrightarrow{\gamma^M_{abs}} = \overrightarrow{\gamma^M_{rel}} + \overrightarrow{\Omega} \wedge \left(\overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{\mathrm{OM}}\right) + \left(\frac{d}{dt}\overrightarrow{\Omega}\right) \wedge \overrightarrow{\mathrm{AM}} + 2\overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{V^M_{rel}}$$

qui, dans le cas où $\overrightarrow{\Omega}$ est considéré constant donne la relation (1) utilisée au début.

3 Étude par le formalisme de Lagrange

Dans le cas du pendule de Foucault qui ne met en jeu qu'un seul corps ponctuel, nous avons vu que le formalisme de Newton permet d'obtenir assez facilement les équations de la dynamique du mouvement. Lorsque plusieurs corps sont en interactions, le nombre d'inconnues auxiliaires (les réactions internes) augmente rapidement, et leurs éliminations devient problématique. Le formalisme de Lagrange est alors utilisé, car, parfois, il permet d'obtenir plus facilement les équations différentielles du mouvement, ce qui n'est pas du tout le cas pour le pendule de Foucault.

3.1 Première étape : Calculer l'énergie cinétique du système

Nous considérons le même repère local que précédemment avec pour origine le point d'équilibre A, l'axe $\vec{z}$ selon la verticale local, l'axe $\vec{x}$ vers le sud et l'axe $\vec{y}$ vers l'est dans l'hémisphère nord.

Le formalisme de Lagrange fait intervenir l'énergie cinétique du système par rapport à un repère galiléen.

$$E_c = \frac{1}{2}m\left\|V^M_{abs}\right\|^2$$

Dans l'approche par le formalisme de Newton, nous n'avons pas été obligé de préciser où se trouvait le point O origine du repère galiléen sur l'axe de rotation de la Terre, mais ici, pour exprimer $\overrightarrow{V^M_{abs}}$, il nous faut choisir un point précis, et nous choisissons ***le point d'intersection de la verticale locale avec l'axe de rotation de la Terre.*** La latitude qui apparaitra dans les équations sera donc la ***latitude astronomique*** :

$$\overrightarrow{V^M_{abs}} = \frac{d}{dt_{/0}}\left(\overrightarrow{OM}\right) = \frac{d}{dt_{/A}}\left(\overrightarrow{OM}\right) + \overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{\mathrm{OM}}$$

Pour exprimer l'énergie cinétique, on va utiliser les composantes dans la base du référentiel local. Il vient :

$$\left(\overrightarrow{V_{abs}^{M}}\right)_A = \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z+R_A \end{pmatrix} + \omega \begin{pmatrix} -\cos\lambda \\ 0 \\ \sin\lambda \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x \\ y \\ z+R_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x}-\omega y\sin\lambda \\ \dot{y}+\omega\left(x\sin\lambda+(z+R_A)\cos\lambda\right) \\ \dot{z}-\omega y\cos\lambda \end{pmatrix}$$

avec $R_A = \|\mathrm{OA}\|$, où l'indice A est mis pour rappeler la latitude Astronomique : cette distance ne va pas au centre C de la Terre mais au point V intersection de la verticale locale avec l'axe de rotation de la Terre.

Il vient :

$$\begin{aligned}\frac{2}{m}E_c =&\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2+2\omega\left[\left((z+R_A)\,\dot{y}-\dot{z}y\right)\cos\lambda+(x\dot{y}-\dot{x}y)\sin\lambda\right] \\ &+\omega^2\left[\left(x\sin\lambda+(z+R_A)\cos\lambda\right)^2+y^2\right] \end{aligned} \tag{16}$$

3.2 Deuxième étape : Calculer le potentiel ou le travail des forces externes

La force extérieure d'attraction $\overrightarrow{F}$ appliquée au pendule peut être prise en compte, soit en calculant les forces généralisées générées à partir de son travail $\delta W = \overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{\delta M}$, soit à partir de son potentiel $V=-W$ ce qui est pratique si on possède déjà son expression. Dans le premier cas (passage par le calcul de δW), les forcse généralisées $Q_{q_i} = \frac{\partial W}{\partial q_i}$ sont mises aux seconds membres des équations de Lagrange. Dans le deuxième cas ce sont les dérivées partielles de son potentiel $+\frac{\partial V}{\partial q_i}$ qui sont mises dans le premier membre.

Remarque : Dans l'approche par le formalisme de Newton, nous n'avons pas eu besoin d'expliciter $\overrightarrow{F}$ car nous lui avons substitué $m\overrightarrow{g}$ en lui ajoutant la force centrifuge.

La force d'attraction s'écrit :

$$\overrightarrow{F} = -\frac{km}{\|\mathrm{CM}\|^3}\overrightarrow{\mathrm{CM}}$$

où C est le centre de la Terre.

Ses composantes dans la base du repère local s'écrivent :

$$\left(\overrightarrow{F}\right)_A = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} = -\frac{km}{\|\mathrm{CM}\|^3}\begin{pmatrix} x-X_c \\ y \\ z+R_c \end{pmatrix} \tag{17}$$

où X_c et $-R_c$ sont les coordonnées du centre C de la Terre dans le repère local, avec approximativement :

$$\begin{aligned} X_c &\simeq R_c\left(\lambda-\lambda_{geo}\right) \\ R_A &\simeq R_c + X_c\mathrm{tg}\lambda \end{aligned}$$

La différence entre la latitude astronomique λ et la géographique λ_{geo} est très faible. Elle est nulle aux pôles et à l'équateur et son maximul est légèrement inférieur à 0.2° à la latitude de 45° (le maximum, en radians, est voisin de $e^2/2$ ou $e \simeq 0.0818$ est l'excentricité de l'ellipsoïde).

Calculons le travail élémentaire de cette force. On a $\delta W = \overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{\delta M} = -\frac{km}{\|\mathrm{CM}\|^3}\overrightarrow{\mathrm{CM}}\cdot\overrightarrow{\delta M}$. Avec $\overrightarrow{\delta M} = \delta x\vec{i}+\delta y\vec{j}+\delta z\vec{k}$. Il en résulte que :

$$\begin{pmatrix} \frac{\delta W}{\delta x} \\ \frac{\delta W}{\delta y} \\ \frac{\delta W}{\delta z} \end{pmatrix} = -\frac{km}{\|\mathrm{CM}\|^3}\begin{pmatrix} \overrightarrow{\mathrm{CM}}\cdot\vec{i} \\ \overrightarrow{\mathrm{CM}}\cdot\vec{j} \\ \overrightarrow{\mathrm{CM}}\cdot\vec{k} \end{pmatrix} = -\frac{km}{\|\mathrm{CM}\|^3}\begin{pmatrix} x-X_c \\ y \\ R+z \end{pmatrix}$$

Remarquons qu'en prenant comme coordonnées généralisées les coordonnées cartésiennes de M, le résultat est trivial. On retrouve les composantes de $\overrightarrow{F}$ dans la base du repère local

Approche par le potentiel :

En remarquant que $\overrightarrow{\mathrm{CM}}\cdot\overrightarrow{\delta M} = \rho\delta\rho$ avec $\rho = \|\mathrm{CM}\|$, il vient $\delta W = -\dfrac{km}{\rho^2}\delta\rho = -\delta V$, d'où :

$$V = \int\frac{km}{\rho^2}\delta\rho = -\frac{km}{\rho}$$

soit :

$$V = -\frac{km}{\|\mathrm{CM}\|}$$

Avec :

$$\|\mathrm{CM}\| = \sqrt{(x - X_c)^2 + y^2 + (R_c + z)^2}$$

il s'écrit :

$$V = -\frac{km}{\sqrt{(x - X_c)^2 + y^2 + (R_c + z)^2}} \tag{18}$$

Vérifions en calculant les expressions des $\frac{\partial V}{\partial q_i}$, affectées du signe « - » comme si elles étaient dans le second membre des équations de Lagrange, afin de faire la comparaison avec les $\frac{\partial W}{\partial q_i}$:

$$-\begin{pmatrix} \frac{\delta V}{\delta x} \\ \frac{\delta V}{\delta y} \\ \frac{\delta V}{\delta z} \end{pmatrix} = -\frac{km}{\|\mathrm{CM}\|^2} \begin{pmatrix} \frac{\delta\|\mathrm{CM}\|}{\delta x} \\ \frac{\delta\|\mathrm{CM}\|}{\delta y} \\ \frac{\delta\|\mathrm{CM}\|}{\delta z} \end{pmatrix}$$

soit :

$$-\begin{pmatrix} \frac{\delta V}{\delta x} \\ \frac{\delta V}{\delta y} \\ \frac{\delta V}{\delta z} \end{pmatrix} = -\frac{km}{\|\mathrm{CM}\|^3} \begin{pmatrix} x - X_c \\ y \\ R_c + z \end{pmatrix}$$

qui est bien identique au résultat précédent.

3.3 Traitement en non-holonome

On sait résoudre la liaison $l = cte$, et calculer $z = l - \sqrt{l^2 - (x^2 + y^2)}$. Si on se sert de cette relation pour éliminer z, la relation est dite holonome, et si on ne s'en sert pas (ou si on est incapable de la résoudre pour effectuer une élimination) elle est dite non-holonome. Commençons par cette deuxième approche qui bien que conservant 3 paramètres semble moins calculatoire.

3.3.1 Prise en compte explicite de la réaction (sans multiplicateur de Lagrange)

Dans le calcul des dérivées partielles $\frac{\partial W}{\partial q_i}$ intervenant dans le second membre des équations de Lagrange, on ne prend en compte que les forces qui travaillent pendant les déplacements. Comme la réaction $\overrightarrow{S}$ du fil de suspension est orthogonale au déplacement de la masse, elle ne travaille pas (si la liaison est respectée). Pour satisfaire cette condition, il y a la possibilité déjà évoquée du traitement en holonome en éliminant un paramètre de configuration. Mais ici nous conservons les 3 paramètres. Il faut donc faire travailler cette force dans un déplacement $\overrightarrow{\delta M}$ quelconque (ne respectant plus la contrainte). On parle alors de travail virtuel.

Le travail de la force de réaction s'écrit simplement $\delta W = \overrightarrow{S} \cdot \overrightarrow{\delta M}$ avec $\overrightarrow{\delta M} = \delta x\vec{i} + \delta y\vec{j} + \delta z\vec{k}$. Si on note $(S_x S_y, S_z)$ les composantes de $\overrightarrow{S}$ on a tout simplement $\delta W = S_x\delta x + S_x\delta x + S_x\delta x$ d'où :

$$\begin{pmatrix} \frac{\delta W}{\delta x} \\ \frac{\delta W}{\delta y} \\ \frac{\delta W}{\delta z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_x \\ S_y \\ S_z \end{pmatrix}$$

résultat trivial en coordonnées cartésiennes. D'où, en notant S le module de $\overrightarrow{S}$ qui est dirigée selon $\overrightarrow{MP}$:

$$\begin{pmatrix} \frac{\delta W}{\delta x} \\ \frac{\delta W}{\delta y} \\ \frac{\delta W}{\delta z} \end{pmatrix} = \frac{S}{l} \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ l - z \end{pmatrix}$$

3.3.2 Élimination de la réaction par multiplicateur de Lagrange

Le calcul du vecteur de composantes $\frac{\partial W}{\partial q_i}$ (qui est trivial ici) est parfois complexe, et Lagrange a élaboré une méthode extrêmement astucieuse pour générer très facilement un vecteur qui lui est proportionnel. Si on ne s'intéresse qu'au mouvement et pas à la valeur de la réaction qui maintient la contrainte, la variable

S qui est destinée à être éliminée peut être remplacée par un terme proportionnel (avec un facteur de proportionnalité inconnu a priori). C'est la méthode des multiplicateurs de Lagrange.

En dérivant la relation (7) qui exprime la liaison, on obtient :

$$-x\dot{x} - y\dot{y} + (l - z)\,\dot{z} = 0$$

qui est ***la forme linéaire*** en $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ ***de la condition non-holonome*** (ici considérée comme telle).

Cette forme linéaire fait apparaitre les coefficients $-x$, $-y$ et $(l - z)$ qui seront appliqués au multiplicateur μ de Lagrange affecté à cette condition (on affecte un multiplicateur différent par condition holonome). On met dans le second membre des équations de Lagrange chaque multiplicateur affecté du coefficient correspondant au paramètre de configuration de l'équation, comme ceci :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{x}}\right) - \left(\frac{\partial E_c}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) &= -x\mu \\
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{y}}\right) - \left(\frac{\partial E_c}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right) &= -y\mu \\
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{z}}\right) - \left(\frac{\partial E_c}{\partial z}\right) + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right) &= (l - z)\,\mu
\end{aligned}$$

En comparant avec les $\frac{\partial W}{\partial q_i}$, on constate que $\mu = \dfrac{S}{l}$: le multiplicateur de Lagrange est ici égal au module de la réaction divisé par la longueur du fil de suspension. C'est magique ! ! Il suffit de calculer le travail virtuel de la réaction selon un seul degré de liberté pour avoir le facteur de proportionnalité.

Le succès de la mécanique analytique (Lagrange, Hamilton...) auprès des théoriciens vient de cette facilité à générer les termes des équations sans avoir à rentrer dans les considérations physiques (calcul des composantes des forces, du mouvement de leur point d'application...)

3.3.3 Dérivation de l'énergie cinétique

Dans ce qui suit, pour alléger les écritures, on considère une énergie cinétique réduite $T = \dfrac{E_c}{m}$

Calculons d'abord les $\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} &= \dot{x} - \omega y \sin\lambda \\
\frac{\partial T}{\partial \dot{y}} &= \dot{y} + \omega\,(z + R_A)\cos\lambda + \omega x \sin\lambda \\
\frac{\partial T}{\partial \dot{z}} &= \dot{z} - \omega y \cos\lambda
\end{aligned}$$

puis les $\frac{d}{dt}(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}})$:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) &= \ddot{x} - \omega\dot{y}\sin\lambda \\
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}}\right) &= \ddot{y} + \omega\dot{z}\cos\lambda + \omega\dot{x}\sin\lambda \\
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{z}}\right) &= \ddot{z} - \omega\dot{y}\cos\lambda
\end{aligned}$$

Calculons les $\frac{\partial T}{\partial q}$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial T}{\partial x} &= \omega\dot{y}\sin\lambda + \omega^2\,(x\sin\lambda + (z + R_A)\cos\lambda)\sin\lambda \\
\frac{\partial T}{\partial y} &= -\omega\,(\dot{z}\cos\lambda + \dot{x}\sin\lambda) + \omega^2 y \\
\frac{\partial T}{\partial z} &= \omega\dot{y}\cos\lambda + \omega^2\,(x\sin\lambda + (z + R_A)\cos\lambda)\cos\lambda
\end{aligned}$$

3.3.4 Les équations différentielles

Dans ce qui suit, on considère l'énergie cinétique massique, la réaction massique $s = \dfrac{S}{m}$ et la force d'attraction massique en divisant par la masse.

En réunissant les divers éléments, on obtient :

$$\begin{aligned}
\ddot{x} - \omega\dot{y}\sin\lambda - \left(\omega\dot{y}\sin\lambda + \omega^2\left(x\sin\lambda + (z+R_A)\cos\lambda\right)\sin\lambda\right) &= -\frac{k}{\rho^3}\left(x - X_c\right) - \frac{s}{l}x \\
\ddot{y} + \omega\dot{z}\cos\lambda + \omega\dot{x}\sin\lambda - \left(-\omega\left(\dot{z}\cos\lambda + \dot{x}\sin\lambda\right) + \omega^2 y\right) &= -\frac{k}{\rho^3}y - \frac{s}{l}y \\
\ddot{z} - \omega\dot{y}\cos\lambda - \left(\omega\dot{y}\cos\lambda + \omega^2\left(x\sin\lambda + (z+R_A)\cos\lambda\right)\cos\lambda\right) &= -\frac{k}{\rho^3}\left(R_c + z\right) + \frac{s}{l}\left(l - z\right)
\end{aligned}$$

Soit :

$$\begin{aligned}
\ddot{x} - 2\omega\dot{y}\sin\lambda &= -\frac{k}{\rho^3}\left(x - X_c\right) + \omega^2\left(x\sin\lambda + (z+R_A)\cos\lambda\right)\sin\lambda - \frac{s}{l}x \\
\ddot{y} + 2\omega\dot{z}\cos\lambda + 2\omega\dot{x}\sin\lambda &= -\frac{k}{\rho^3}y + \omega^2 y - \frac{s}{l}y \\
\ddot{z} - 2\omega\dot{y}\cos\lambda &= -\frac{k}{\rho^3}\left(R_c + z\right) + \omega^2\left(x\sin\lambda + (z+R_A)\cos\lambda\right)\cos\lambda + \frac{s}{l}\left(l - z\right)
\end{aligned}$$

Pour simplifier ces relations on va faire intervenir la gravité par le biais de l'accélération centripète.

Calculons l'accélération centripète $\overrightarrow{\Gamma_c} = \overrightarrow{\Omega} \wedge \left(\overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM}\right)$ subie par le pendule. Ses composantes dans le repère local sont données par :

$$\left(\overrightarrow{\Gamma_c}\right)_A = \omega^2 \begin{pmatrix} -\cos\lambda \\ 0 \\ \sin\lambda \end{pmatrix} \wedge \left(\begin{pmatrix} -\cos\lambda \\ 0 \\ \sin\lambda \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x \\ y \\ R_A + z \end{pmatrix}\right)$$

$$\left(\overrightarrow{\Gamma_c}\right)_A = \omega^2 \begin{pmatrix} -\left(x\sin\lambda + (R_A+z)\cos\lambda\right)\sin\lambda \\ y \\ -\left(x\sin\lambda + (R_A+z)\cos\lambda\right)\cos\lambda \end{pmatrix}$$

Or on a vu que $m\overrightarrow{g}$ était défini par $m\overrightarrow{g} = \overrightarrow{F} - m\overrightarrow{\Gamma_c}$, d'où en composantes dans le repère local :

$$m\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix} = -\frac{km}{\rho^3}\begin{pmatrix} x - X_c \\ y \\ R_c + z \end{pmatrix} - m\omega^2 \begin{pmatrix} -\left(x\sin\lambda + (R_A+z)\cos\lambda\right)\sin\lambda \\ y \\ -\left(x\sin\lambda + (R_A+z)\cos\lambda\right)\cos\lambda \end{pmatrix}$$

Il en résulte les relations :

$$-\frac{k}{\rho^3}\left(x - X_c\right) + \omega^2\left(x\sin\lambda + (R_A+z)\cos\lambda\right)\sin\lambda = 0 \tag{19}$$

$$-\frac{k}{\rho^3}y + \omega^2 y = 0 \tag{20}$$

$$-\frac{k}{\rho^3}\left(R_c + z\right) + \omega^2\left(x\sin\lambda + (R_A+z)\cos\lambda\right)\cos\lambda = -g \tag{21}$$

qui sont utilisées pour simplifier les équations différentielles en :

$$\begin{aligned}
\ddot{x} - 2\omega\dot{y}\sin\lambda &= -\frac{s}{l}x \\
\ddot{y} + 2\omega\dot{z}\cos\lambda + 2\omega\dot{x}\sin\lambda &= -\frac{s}{l}y \\
\ddot{z} - 2\omega\dot{y}\cos\lambda &= -g + \frac{s}{l}\left(l - z\right)
\end{aligned} \tag{22}$$

On retrouve les équations différentielles (4), (5) et (6) établies plus simplement en utilisant le formalisme de Newton. La résolution est identique.

3.4 Traitement en holonome

C'est l'approche classique où la contrainte $z = l - \sqrt{l^2 - (x^2 + y^2)}$ est utilisée pour ne considérer que les deux degrés de liberté x et y. La tension du fil n'est plus à prendre en compte puisqu'elle ne travaille pas, sa condition de liaison étant respectée.

Dans l'approche traditionnelle, l'énergie cinétique n'est exprimée qu'en fonction de x,y, $\dot{x}$ et $\dot{y}$ après élimination dans (16) de z et $\dot{z}$. On utilise alors une expression $T(x, y, \dot{x}, \dot{y})$. De même dans le potentiel massique (divisé par la masse pour simplifier les écritures) (18) on élimine z pour obtenir une expression $V(x, y)$. Comme V ne dépend pas des vitesses, les 2 équations différentielles du mouvement se limitent à :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) - \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) = 0\\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}}\right) - \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right) = 0\end{aligned}$$

sans deuxième membre.

Comme l'élimination de z et $\dot{z}$ dans T et V conduit à des expressions calamiteuses, plutôt que d'éliminer z et $\dot{z}$, laissons les en place dans les anciennes formulations que nous noterons T_n et V_n, et dérivons z et $\dot{z}$ partiellement par rapport aux 2 autres paramètres quand on les rencontre. On a les relations exactes et approchées suivantes :

$$\begin{aligned}z &\simeq \frac{x^2 + y^2}{2l}\\ \dot{z} = \frac{x\dot{x} + y\dot{y} - z\dot{z}}{l} &\simeq \frac{x\dot{x} + y\dot{y}}{l}\\ \ddot{z} = \frac{x\ddot{x} + y\ddot{y} + \dot{x}^2 + \dot{y}^2 - z\ddot{z} - \dot{z}^2}{l} &\simeq \frac{x\ddot{x} + y\ddot{y} + \dot{x}^2 + \dot{y}^2}{l}\end{aligned}$$

Elles permettent d'écrire :

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial \dot{z}}{\partial \dot{x}} \simeq \frac{x}{l}\\ \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial \dot{z}}{\partial \dot{y}} \simeq \frac{y}{l}\end{aligned}$$

En prenant en compte :

$$\frac{\partial T_n}{\partial \dot{z}} = \dot{z} - \omega y \cos\lambda$$

il vient :

$$\begin{aligned}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} &\simeq \frac{\partial T_n}{\partial \dot{x}} + \frac{x}{l}\frac{\partial T_n}{\partial \dot{z}} \simeq \dot{x} - \omega y \sin\lambda + \frac{x}{l}(\dot{z} - \omega y \cos\lambda)\\ \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} &\simeq \frac{\partial T_n}{\partial \dot{y}} + \frac{y}{l}\frac{\partial T_n}{\partial \dot{z}} \simeq \dot{y} + \omega(z + R_A)\cos\lambda + \omega x \sin\lambda + \frac{y}{l}(\dot{z} - \omega y \cos\lambda)\end{aligned}$$

Dérivons par rapport au temps. Il vient :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) &\simeq \ddot{x} - \omega\dot{y}\sin\lambda + \frac{\dot{x}}{l}(\dot{z} - \omega y \cos\lambda) + \frac{x}{l}(\ddot{z} - \omega\dot{y}\cos\lambda)\\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}}\right) &\simeq \ddot{y} + \omega\dot{z}\cos\lambda + \omega\dot{x}\sin\lambda + \frac{\dot{y}}{l}(\dot{z} - \omega y \cos\lambda) + \frac{y}{l}(\ddot{z} - \omega\dot{y}\cos\lambda)\end{aligned}$$

Calculons les $\frac{\partial T}{\partial x}$ et $\frac{\partial T}{\partial y}$. On a :

$$\frac{\partial T_n}{\partial z} = \omega\dot{y}\cos\lambda + \omega^2(x\sin\lambda + (z + R_A)\cos\lambda)\cos\lambda$$

d'où :

$$\begin{aligned}\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial T_n}{\partial x} + \frac{\partial T_n}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\\ \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial T_n}{\partial y} + \frac{\partial T_n}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\end{aligned}$$

soit :

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial T}{\partial x} &\simeq \omega\dot{y}\sin\lambda + \omega^2\left(x\sin\lambda + (z+R_A)\cos\lambda\right)\sin\lambda + \frac{x}{l}\Big(\omega\dot{y}\cos\lambda + \omega^2\left(x\sin\lambda + (z+R_A)\cos\lambda\right)\cos\lambda\Big)\\
\frac{\partial T}{\partial y} &\simeq -\omega\left(\dot{z}\cos\lambda + \dot{x}\sin\lambda\right) + \omega^2 y + \frac{y}{l}\Big(\omega\dot{y}\cos\lambda + \omega^2\left(x\sin\lambda + (z+R_A)\cos\lambda\right)\cos\lambda\Big)
\end{aligned}
$$

Par ailleurs (toujours avec les potentiels divisés par la masse) :

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) &= \left(\frac{\partial V_n}{\partial x}\right) + \frac{x}{l}\left(\frac{\partial V_n}{\partial z}\right)\\
\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right) &= \left(\frac{\partial V_n}{\partial y}\right) + \frac{y}{l}\left(\frac{\partial V_n}{\partial z}\right)
\end{aligned}
$$

soit :

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) &\simeq \frac{k}{\rho^3}\Big[(x - X_c) + \frac{x}{l}(R+z)\Big]\\
\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right) &\simeq \frac{k}{\rho^3}\Big[y + \frac{y}{l}(R_c+z)\Big]
\end{aligned}
$$

La réunion du tout conduit à :

$$
\begin{aligned}
&\ddot{x} - \omega\dot{y}\sin\lambda + \frac{\dot{x}}{l}\left(\dot{z} - \omega y\cos\lambda\right) + \frac{x}{l}\left(\ddot{z} - \omega\dot{y}\cos\lambda\right) - \Big(\omega\dot{y}\sin\lambda + \omega^2\left(x\sin\lambda + (z+R_A)\cos\lambda\right)\sin\lambda\Big)\\
&-\frac{x}{l}\Big(\omega\dot{y}\cos\lambda + \omega^2\left(x\sin\lambda + (z+R_A)\cos\lambda\right)\cos\lambda\Big) + \frac{k}{\rho^3}\Big[(x - X_c) + \frac{x}{l}(R_c+z)\Big] \simeq 0
\end{aligned}
\tag{23}
$$

$$
\begin{aligned}
&\ddot{y} + \omega\dot{z}\cos\lambda + \omega\dot{x}\sin\lambda + \frac{\dot{y}}{l}\left(\dot{z} - \omega y\cos\lambda\right) + \frac{y}{l}\left(\ddot{z} - \omega\dot{y}\cos\lambda\right) - \Big(-\omega\left(\dot{z}\cos\lambda + \dot{x}\sin\lambda\right) + \omega^2 y\Big)\\
&-\frac{y}{l}\Big(\omega\dot{y}\cos\lambda + \omega^2\left(x\sin\lambda + (z+R_A)\cos\lambda\right)\cos\lambda\Big) + \frac{k}{\rho^3}\Big[y + \frac{y}{l}(R_c+z)\Big] \simeq 0
\end{aligned}
\tag{24}
$$

Utilisons les relations (19) et (21) pour simplifier (23). Il vient :

$$\ddot{x} - 2\omega\dot{y}\sin\lambda - 2\frac{x}{l}\omega\dot{y}\cos\lambda + \frac{x}{l}\ddot{z} + \frac{\dot{x}}{l}\left(\dot{z} - \omega y\cos\lambda\right) \simeq -\frac{x}{l}g$$

soit au premier ordre :

$$\ddot{x} - 2\omega\dot{y}\sin\lambda + \frac{x}{l}g \simeq 0$$

Utilisons les relations (24) et (21) pour simplifier (24). Il vient :

$$\ddot{y} + 2\omega\dot{x}\sin\lambda + 2\omega\frac{x}{l}\dot{x}\cos\lambda + \frac{\dot{y}}{l}\dot{z} + \frac{y}{l}\ddot{z} - \frac{y}{l}\omega\dot{y}\cos\lambda \simeq -\frac{y}{l}g$$

soit au premier ordre :

$$\ddot{y} + 2\omega\dot{x}\sin\lambda + \frac{y}{l}g \simeq 0$$

On retrouve les mêmes équations simplifiées au 1er ordre que par le formalisme de Newton, mais avec me semble-t-il des calculs plus laborieux.