Ordre des matrices de rotation dans les produits

Ce document essaie d'apporter quelques éléments pour mieux appréhender les différentes possibilités qui sont utilisés dans les modélisations d'enchaînements de rotations ou de changements de repères.

Considérons deux bases orthonormées $\mathcal{B}_A$ de vecteurs unitaires $\overrightarrow{i}_A$, $\overrightarrow{j}_A$ et $\overrightarrow{k}_A$, et $\mathcal{B}_B$ de vecteurs unitaires $\overrightarrow{i}_B$, $\overrightarrow{j}_B$ et $\overrightarrow{k}_B$.

Considérons également un vecteur $\overrightarrow{u}$ défini par :

$$\overrightarrow{u} = x_A \overrightarrow{i}_A + y_A \overrightarrow{j}_A + z_A \overrightarrow{k}_A = x_B \overrightarrow{i}_B + y_A \overrightarrow{j}_B + z_A \overrightarrow{k}_B$$

Nous noterons les composantes du vecteur $\vec{u}$ comme ceci :

$$(u)_A = \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix} \text{ et } (u)_B = \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{pmatrix}$$

et l'opération de changement de base comme ceci :

$$(u)_A = R_{AB} \, (u)_B$$

où nous avons noté R_{AB} la matrice de changement de base qui permet de calculer les composantes dans le base $\mathcal{B}_A$ à partir de celles dans la base $\mathcal{B}_B$.

Si nous considérons une troisième base $\mathcal{B}_C$ de vecteurs unitaires $\overrightarrow{i}_C$, $\overrightarrow{j}_C$ et $\overrightarrow{k}_C$, nous pouvons écrire :

$$\begin{array}{rcl} (u)_A & = & R_{AB} \, (u)_B \\ (u)_B & = & R_{BC} \, (u)_C \\ (u)_A & = & R_{AB} R_{BC} \, (u)_C = R_{AC} \, (u)_C \end{array}$$

d'où, avec ces notations :

$$R_{AC} = R_{AB} R_{BC}$$

relation facile à mémoriser car elle rappelle la relation de Chasles $AC = AB + BC$.

Les matrices R_{CA}, R_{BA} et R_{CB} qui font les changements de base inverses sont notées :

$$\begin{array}{rcl} R_{CA} & = & R_{AC}^{-1} = R_{AC}^T \\ R_{BA} & = & R_{AB}^{-1} = R_{AB}^T \\ R_{CB} & = & R_{BC}^{-1} = R_{BC}^T \end{array}$$

Ce sont les matrices transposées.

On peut constater que :

$$\begin{array}{rcl} R_{AC}^T & = & R_{CA} = R_{CB} R_{BA} = R_{BC}^T R_{AB}^T \\ R_{AC}^T & = & R_{BC}^T R_{AB}^T \end{array}$$

Toutes ces relations sont bien connues : la transposée du produit de matrices est le produit des matrices transposées effectué dans l'ordre inverse.

Considérons maintenant l'opérateur rotation $\mathcal{R}_{AB}$ qui transforme la base $\mathcal{B}_A$ en base $\mathcal{B}_B$. Il est tel que :

$$\begin{array}{rcl} \overrightarrow{i}_B & = & \mathcal{R}_{AB} \left(\overrightarrow{i}_A \right) \\ \overrightarrow{j}_B & = & \mathcal{R}_{AB} \left(\overrightarrow{j}_A \right) \\ \overrightarrow{k}_B & = & \mathcal{R}_{AB} \left(\overrightarrow{k}_A \right) \end{array}$$

Considérons également l'opérateur rotation $\mathcal{R}_{BC}$ qui transforme la base $\mathcal{B}_B$ en base $\mathcal{B}_C$ et l'opérateur $\mathcal{R}_{AC}$ qui transforme la base $\mathcal{B}_A$ en base $\mathcal{B}_C$

L'opérateur $\mathcal{R}_{AB}$ transforme le vecteur $\overrightarrow{u}$ en vecteur $\overrightarrow{v}$ et l'opérateur $\mathcal{R}_{BC}$ transforme le vecteur $\overrightarrow{v}$ en vecteur $\overrightarrow{w}$. On a donc :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{v} &= \mathcal{R}_{AB}\left(\overrightarrow{u}\right) \\
\overrightarrow{w} &= \mathcal{R}_{BC}\left(\overrightarrow{v}\right) \\
\overrightarrow{w} &= \mathcal{R}_{BC}\left(\overrightarrow{v}\right) = \mathcal{R}_{BC}\left(\mathcal{R}_{AB}\left(\overrightarrow{u}\right)\right) = \mathcal{R}_{AC}\left(\overrightarrow{u}\right)
\end{aligned}$$

En utilisant l'opérateur $\circ$pour la composition des transformation, la dernière ligne est notée :

$$\overrightarrow{w} = \mathcal{R}_{BC} \circ \mathcal{R}_{AB}\left(\overrightarrow{u}\right) = \mathcal{R}_{AC}\left(\overrightarrow{u}\right)$$

ce qui fait apparaître la relation classique de composition des opérateurs rotations :

$$\mathcal{R}_{AC} = \mathcal{R}_{BC} \circ \mathcal{R}_{AB}$$

En comparant ce produit à celui des matrices de changement de bases inverses $R_{AC}^T = R_{BC}^T R_{AB}^T$ on peut constater qu'on peut faire correspondre aux opérateurs rotations les matrices inverses (où transposées) des changement de bases.

Les opérateurs rotations transforment des vecteurs. Ils ne sont pas pratique à utiliser car les vecteurs sont des éléments complexes, alors que les matrices de changements de bases manipulent des composantes qui sont des scalaires, éléments sur lesquels les opérations mathématiques sont simples. Il en résulte que la correspondance précédente entre opérateurs rotations et matrices inverses de changement de base est utilisée, en particulier par les roboticiens pour enchaîner les produits de changements de bases. Au lieu de les multiplier comme des opérateurs rotations en mettant le premier en droite (en fin de ligne) et le dernier à gauche en début de ligne, ils les multiplient comme des matrices de changement de base, de gauche à droite,dans l'ordre de succession des rotations.

En calcul numérique, la définition de la matrice de changement de base associée à R_{AB} est simple. Elle est faite d'éléments a_{ij} appelés ***coefficients*** *de la matrice de changement* de base, tels que :

$$\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{pmatrix}$$

Les relations vectorielles entres les vecteurs des bases $\mathcal{B}_A$ et $\mathcal{B}_B$ sont présentées par les mathématiciens sous forme matricielle avec des matrices colonnes de vecteurs sous la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} \overrightarrow{i}_B \\ \overrightarrow{j}_B \\ \overrightarrow{k}_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overrightarrow{i}_A \\ \overrightarrow{j}_A \\ \overrightarrow{k}_A \end{pmatrix}$$

Cette écriture fait apparaître une matrice d'éléments b_{ij} associée à l'opérateur rotation $\mathcal{R}_{AB}$. Les éléments b_{ij} sont appelés les ***composantes*** *de l'opérateur rotation* $\mathcal{R}_{AB}$. ATTENTION : Cette matrice des composantes de $\mathcal{R}_{AB}$ ne multiplie pas des scalaires, mais elle multiplie des vecteurs.

Nous avons vu que ces deux matrices, qui ne sont pas de même nature, sont *numériquement* reliées par la relation :

$$\begin{aligned}
[a_{ij}] &= [b_{ij}]^{-1} = [b_{ij}]^T \\
[b_{ij}] &= [a_{ij}]^{-1} = [a_{ij}]^T
\end{aligned}$$

Considérons les matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

associées au passage entre deux bases. Il est évident que les deux bases concernées se déduisent l'une de l'autre par une rotation d'un angle $\pm\alpha$autour de l'axe $\overrightarrow{k}$.

Examinons plus précisément quelle transformation peut-on associer à ces matrices. pour cela nous allons examiner les composantes du vecteur de base $\overrightarrow{i}_B$.

Si nous associons $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = [a_{ij}]$ à R_{AB} et $\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = [b_{ij}]$ à $\mathcal{R}_{AB}$ on a alors, en appliquant le changement de base au vecteur $\overrightarrow{i}_B$:

$$(i_B)_A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} (i_B)_B = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \\ 0 \end{pmatrix}$$

relation qui montre qu'il s'agit d'une rotation qui transforme base B_A en base B_B par la rotation d'angle $+\alpha$ autour de $\overrightarrow{k}$ ou bien qui transforme B_B en base B_A par la rotation d'angle $-\alpha$ autour de $\overrightarrow{k}$.

Si nous associons $\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = [a_{ij}]$ à $\mathcal{R}_{AB}$ et $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = [b_{ij}]$ à R_{AB} on trouve alors :

$$(i_B)_A = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ -\sin\alpha \\ 0 \end{pmatrix}$$

relation qui montre qu'il s'agit d'une rotation qui transforme base B_A en base B_B par la rotation d'angle $-\alpha$ autour de $\overrightarrow{k}$ ou bien qui transforme B_B en base B_A par la rotation d'angle $+\alpha$ autour de $\overrightarrow{k}$.

Il y a donc de multiples ambiguïtés. Choix de l'ordre des bases, choix du sens de rotation, choix de la matrice utilisée (coefficients du changement de base a_{ij} ou composantes de l'opérateur rotation b_{ij}), et ce dernier choix va conditionner l'ordre des matrices dans les multiplications.

Pour identifier l'opération représentée par ces deux matrices, on aurait pu examiner la transformation effectuée par $[b_{ij}]$.

Avec $[b_{ij}] = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,il vient $\left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{i}_B = \overrightarrow{i}_A \cos\alpha + \overrightarrow{j}_A \sin\alpha \\ \overrightarrow{j}_B = -\overrightarrow{i}_A \sin\alpha + \overrightarrow{j}_A \cos\alpha \\ \overrightarrow{k}_B = \overrightarrow{k}_A \end{array} \right\}$. Difficile de voir qu'il s'agit de la rotation qui transforme base B_A en base B_B par la rotation d'angle $+\alpha$ autour de $\overrightarrow{k}$.

Avec $[b_{ij}] = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,il vient $\left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{i}_B = \overrightarrow{i}_A \cos\alpha - \overrightarrow{j}_A \sin\alpha \\ \overrightarrow{j}_B = \overrightarrow{i}_A \sin\alpha + \overrightarrow{j}_A \cos\alpha \\ \overrightarrow{k}_B = \overrightarrow{k}_A \end{array} \right\}$. Difficile de voir qu'il s'agit de la rotation qui transforme base B_A en base B_B par la rotation d'angle $-\alpha$ autour de $\overrightarrow{k}$.

La difficulté vient du fait que pour interpréter une relation comme $\overrightarrow{i}_B = \overrightarrow{i}_A \cos\alpha + \overrightarrow{j}_A \sin\alpha$, il faut examiner les composantes alors qu'avec l'approche précédente en examinant la deuxième composante de $(i_B)_A$
qui vaut + ou − $\sin\alpha$ suivant le cas, on a tout de suite l'angle signé de la rotation.

Dans la communauté des programmeurs utilisateurs des matrices des rotations 80% (chiffre purement imaginaire) utilisent les matrices de rotation sans se poser de question. Ils ont oublié qu'il y a en fait deux représentations avec des significations bien différentes. Ils en utilisent une et appliquent la recette associé à leur choix. Les 20% restant connaissent cette distinction et 10% travaillent avec les matrices des coefficients des changement de bases et considèrent que la matrice mère est la matrice $[a_{ij}]$, et les 10% restants travaillent les matrices des composantes des opérateurs rotations et considèrent que la matrice mère est la matrice $[b_{ij}]$. Ces deux choix sont parfaitement équivalents, mais quand on est habitué à un choix, on a du mal à se faire à l'autre. C'est comme la conduite à droite, ou la conduite à gauche.

Les utilisateurs occasionnels qui font appel à leur mémoire se souviennent de leur cours de mathématique qui mentionnait les relations $\begin{pmatrix} \overrightarrow{i}_B \\ \overrightarrow{j}_B \\ \overrightarrow{k}_B \end{pmatrix} = [b_{ij}] \begin{pmatrix} \overrightarrow{i}_A \\ \overrightarrow{j}_A \\ \overrightarrow{k}_A \end{pmatrix}$ et $\mathcal{R}_{AC} = \mathcal{R}_{BC} \circ \mathcal{R}_{AB}$. Ils sont généralement très troublés par l'approche des roboticiens qui utilisent les matrices $[a_{ij}]$ est les produits en sens inverse.

Quand on a l'impression d'une erreur, soit au niveau de l'ordre dans les multiplications, soit au niveau de la transposition dans les éléments des matrices, il se peut que le choix utilisé soit l'inverse du choix auquel on est habitué.