

DEFINITION DE TRAJECTOIRES D'ATTITUDE CONTINUES EN ACCELERATION

Michel LLIBRE

Onera/Cert 2 Avenue Edouard Belin 31055 Toulouse Cedex

RESUME - Cet article présente des techniques de génération de trajectoires de consigne continues au second ordre, soit par un filtrage numérique non-linéaire de consignes non admissibles, soit par une définition directe de trajectoires analytiques admissibles. Dans ce cas, nous proposons de spécifier séparément la forme de la trajectoire au moyen de polynômes paramétriques de degré 3, 4 et 5 et sa loi de mouvement au moyen d'une loi temps minimal à dérivée d'accélération bornée. Différents types de repérage des attitudes sont analysés relativement à leur adéquation à la définition de trajectoires d'attitude.

ABSTRACT - *This paper deals with methods that generate second order continuous reference trajectories, either through non-linear digital filtering of non valid reference trajectories or through a direct definition of valid analytic trajectories. In the latter case, we propose a separate specification of the geometrical shape of the trajectory on one hand and of the motion law on the other hand. The shape is first defined by cubic, quartic or fifth degree polynomials, then the motion law is computed by a minimum time algorithm with jerk limitation. Several kinds of attitude coordinate systems are analyzed with respect to their suitability for the definition of attitude trajectories.*

1 INTRODUCTION

Parmi les tâches que sont appelés à réaliser les engins modernes (terrestres, marins, aériens ou spatiaux) nous nous intéressons à celles qui consistent à effectuer de manière très précise un certain mouvement. Même quand les objectifs globaux du mouvement sont simples : "Aller d'une configuration à une autre", la réalisation se traduit souvent par une trajectoire complexe car elle met en jeu une grande quantité de paramètres fixés ou contraints : des points et des dates de rendez-vous, des vitesses nominales sur certains tronçons, des bornes pour les valeurs maximales des vitesse, accélération et dérivée d'accélération (appelée jerk par la suite).

Lorsque l'objectif final est directement fourni en consigne du pilote automatique, l'écart entre la réalisation courante et l'objectif final peut être temporairement très important. La stabilité du comportement de l'engin est obtenue en limitant les gains de boucle de la commande et en saturant les consignes envoyées aux boucles inférieures. La trajectoire suivie n'est connue qu'a posteriori.

La définition de la trajectoire complète, jusqu'à l'objectif final, en prenant en compte les capacités de l'engin, permet par contre l'utilisation de commandes à grands gains qui garantissent le bon suivi de cette trajectoire.

Cet article présente des techniques, relatives à cette deuxième approche, qui permettent de définir des trajectoires de consigne continues au second ordre.

La première partie est consacrée à la description d'un filtre numérique qui fournit une trajectoire de sortie dont les vitesse, accélération et jerk sont bornés mais qui suit parfaitement la trajectoire d'entrée lorsque celle-ci respecte ces contraintes.

La deuxième partie montre une définition des courbes multidimensionnelles continues au second ordre passant par des points de passage donnés, au moyen de segments de courbes de différents types (droites, cercles, polynômes paramétriques).

La troisième partie présente la résolution du problème de commande en temps minimal d'un système du troisième ordre. L'algorithme présenté est utilisé pour définir la loi de mouvement à jerk borné sur les courbes précédentes.

La quatrième partie montre l'adéquation des quaternions à la description de trajectoires d'attitude.

2 FILTRE SATURATEUR DE JERK-ACCELERATION-VITESSE

Nous présentons dans ce chapitre un filtre numérique non-linéaire destiné à limiter les valeurs maximales des dérivées successives d'un signal.

Les objectifs pris en compte lors de la conception de ce filtre ont été les suivants :

- recalage rapide sur une entrée qui ne respecte pas les limites imposées (entrée en échelon par exemple),
- suivi sans erreur d'une entrée qui respecte les limites imposées,
- fonctionnement causal (l'entrée n'est pas connue à l'avance),
- simplicité des algorithmes.

Nous noterons :

- e le signal d'entrée à filtrer et x signal de sortie,
- T la période d'échantillonnage,
- V_{max} , A_{max} , J_{max} les vitesse, accélération et jerk maximaux.

Par ailleurs nous poserons :

$$V = V_{max}T \quad A = A_{max}T^2 \quad J = J_{max}T^3 \quad n = A/J$$

Le schéma du saturateur Jav (Jerk-accélération-vitesse) est représenté figure 1. Il est dérivé d'un filtre que nous avons mis au point pour compresser des trajectoires de robot de peinture [Llib 82].

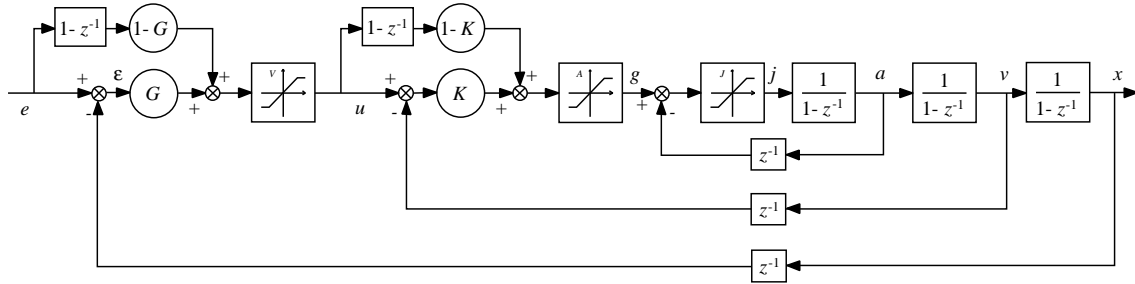


Figure 1. Saturateur jerk-accélération-vitesse.

La boucle interne d'asservissement en accélération présente une saturation de la commande j à $\pm J$. Lorsque l'erreur d'accélération est inférieure à J , la fonction de transfert $\frac{g}{a}(z)$ vaut 1.

En l'absence de saturation, le meilleur réglage pour le gain K de la boucle d'asservissement en vitesse est $K = 1$. En présence des saturations de jerk et d'accélération, cette valeur peut conduire à des réponses aberrantes.

Le fonctionnement des saturations est mis en évidence sur la figure 2. La commande j est proportionnelle à la distance entre le point courant et la droite OP . Sur OP la commande est nulle. Au dessus de JM elle est saturée à $-J$ et en dessous de $-JM$ elle est saturée à $+J$. La pente $-K$ de la droite OP est choisie de telle manière que le point M se trouve sur une parabole de retour à l'origine avec la commande $j = -J$, d'où :

$$K = \frac{2J}{A+J}$$

Le terme de précompensation (feedforward) en vitesse permet d'avoir une fonction de transfert $\frac{u}{v}(z) = 1$ en l'absence de saturation.

Le réglage du gain G de la boucle de position est plus complexe. Lorsque les saturations n'agissent pas, la meilleure valeur de G est 1. Pour cette valeur, on obtient une fonction de transfert unité même en l'absence d'entrée directe. Toutefois, cette valeur doit être réduite afin de prendre en compte le fonctionnement des saturations.

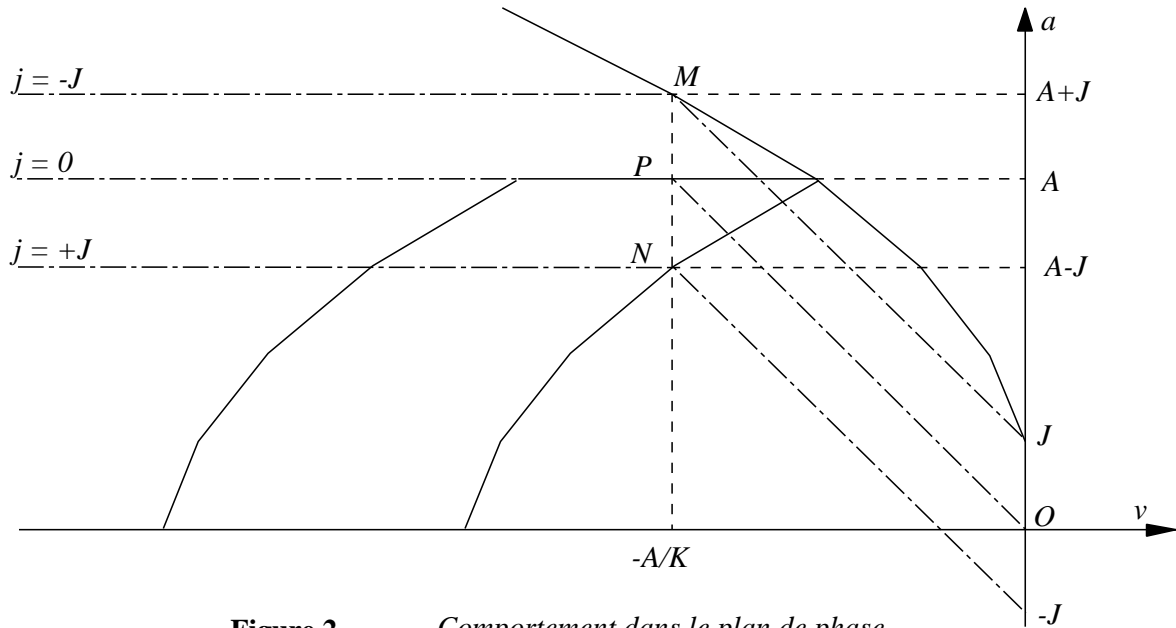


Figure 2. Comportement dans le plan de phase.

Nous avons représenté figure 3 un huitième de l'espace de phase (x, v, a) avec les différentes zones de fonctionnement saturé ou linéaire pour un recalage à l'origine $(0, 0, 0)$.

Une trajectoire typique de recalage à l'origine part du point $M_7 (x_7, 0, 0)$, à vitesse et accélération nulles. Elle débute par une phase à jerk constant $j = +J$ qui l'amène au point $M_6 (x_6, v_6, A)$, puis continue par une phase à jerk nul et accélération constante A qui l'amène au point $M_5 (x_5, V-A/K, A)$, puis suit une phase à jerk constant $j = -J$ qui l'amène au point $M_4 (x_4, V, 0)$, puis une phase à accélération et jerk nuls et vitesse constante V , qui l'amène au point $M_3 (x_3, V, 0)$, puis une phase à jerk négatif, éventuellement saturé à $-J$, qui l'amène au point $M_2 (x_2, v_2, a)$ avec a négatif éventuellement saturé à $-A$. Dans ce cas suit une phase à jerk nul jusqu'au point $M_1 (x_1, v_1, -A)$. L'arrivée en $(0, 0, 0)$ se fait par une phase finale à jerk positif éventuellement saturé à $+J$.

Si le gain G est trop grand, la distance V/G utilisée pour ralentir la vitesse de V à 0 va s'avérer insuffisante, et on pourra observer un dépassement d'autant plus important que G sera grand.

Pour une valeur donnée de G , générant des dépassements, les plus importants correspondent aux trajectoires qui passent par le point N . En effet, pour ce point, l'accélération étant égale à $+A$, la vitesse va croître jusqu'à $+V$ en un point où la distance de ralentissement sera inférieure à V/G .

Le gain G optimal est calculé de manière à ce que la distance x du point N à l'origine soit juste suffisante pour arriver à l'origine sans dépassement.

L'équation du lieu du point N (dans le plan $a = +A$) qui peut être ramené à l'origine, en temps minimal, sans dépassement, est donnée par :

$$x + \frac{v^2}{2A} + \left(2n + \frac{1}{2}\right)v + A \left(\frac{17}{24}n^2 + n + \frac{7}{24}\right) = 0$$

Cette équation est obtenue en intégrant le système à rebours avec la commande $j = +J$ de l'origine O jusqu'au point M_1 du plan $a = -A$, puis avec la commande $j = 0$ jusqu'à un certain point M_2 , puis avec la commande $j = -J$ jusqu'à un point M_3 du plan $a = +A$ voisin du point N .

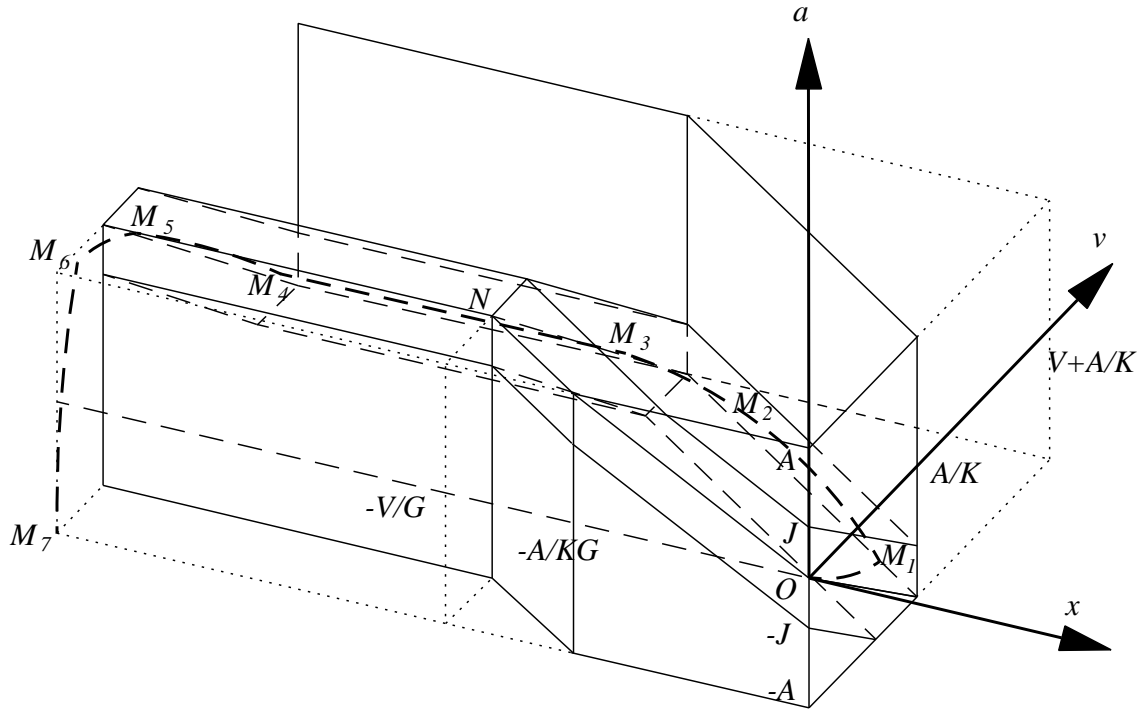


Figure 3. Comportement dans l'espace de phase.

Pour évaluer G , on écrit que le point $N (-V/G, V-A/K, A)$ appartient à ce lieu. En prenant pour K sa valeur nominale $2J/(A+J)$, tous calculs faits, on obtient :

$$G = \frac{2A}{V + 3nA + \frac{A^2}{3V}(1 - n^2)}$$

Programmation du filtre : Elle est très simple et ne nécessite que 2 multiplications :
Initialisation :

$$x = e_- = e \quad ; \quad a = v = u_- = 0$$

Calculs périodiques :

$$\begin{aligned} u &= G(e_- - x) + (e - e_-) \quad ; \quad e_- = e \\ \text{si } |u| > V \text{ alors } u &= V \text{ signe}(u) \\ g &= K(u_- - v) + (u - u_-) \quad ; \quad u_- = u \\ \text{si } |g| > A \text{ alors } g &= A \text{ signe}(g) \\ j &= g - a \\ \text{si } |j| > J \text{ alors } j &= J \text{ signe}(j) \\ a &= a + j \quad ; \quad v = v + a \quad ; \quad x = x + v \end{aligned}$$

Application : Une des principales applications de ce filtre est la génération de consignes respectant des contraintes en jerk, accélération et vitesse à partir d'un signal de commande manuelle généré par un pilote humain.

3 DEFINITION DE COURBES CONTINUES A L'ORDRE 2

Nous considérons un espace ponctuel E de dimension L (exemple : l'espace de dimension 4 des attitudes représentées par des quaternions). Dans cet espace, nous désirons spécifier des courbes continues à l'ordre 2. Ces courbes sont découpées en segments et chaque segment est défini par des fonctions analytiques qui permettent de calculer chaque coordonnée du point courant M de la courbe en fonction d'un paramètre libre u , que nous appellerons abscisse paramétrique.

Nous noterons $M_k(u)$ l'ensemble des L équations analytiques qui permettent de calculer les coordonnées du point courant M en fonction de l'abscisse paramétrique u sur le segment de courbe numéro k qui relie les points A_k et A_{k+1} de E . Par convention, nous supposons que M est en A_k point de départ du segment pour $u = 0$, et en A_{k+1} point final du segment pour $u = u_k$. Les courbes que nous considérons dans cette étude respecteront systématiquement les $3L$ relations exprimant la continuité d'ordre 2 au point de jonction A_{k+1} entre les segments $M_k(u)$ et $M_{k+1}(u)$:

$$M_k(u_k) = A_{k+1} = M_{k+1}(0) \quad ; \quad \frac{dM_k}{du}(u_k) = \frac{dM_{k+1}}{du}(0) \quad ; \quad \frac{d^2M_k}{du^2}(u_k) = \frac{d^2M_{k+1}}{du^2}(0)$$

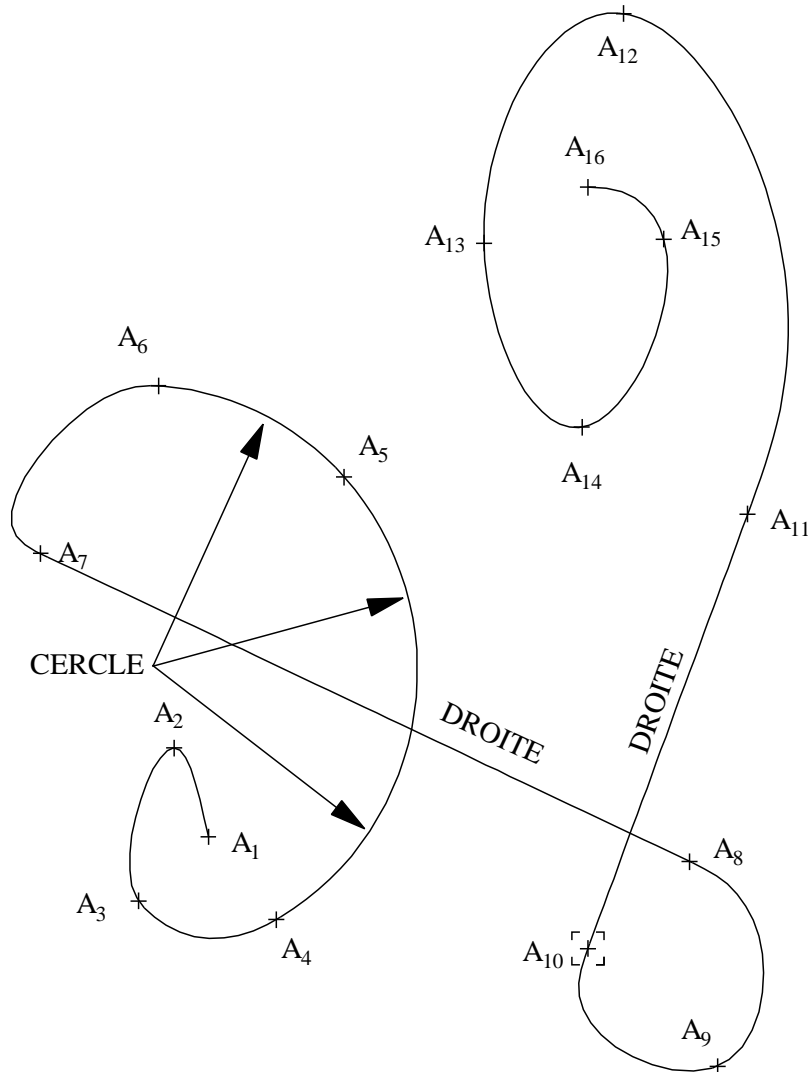


FIG. 1 – **Figure 4.** Exemple de courbe multi-segments continue à l'ordre 2

Un exemple de courbe multi-segments continue à l'ordre 2 est représenté sur la figure 4. Les points de passage A_1 à A_{16} sont imposés. Les segments A_4A_5 et A_5A_6 sont sur l'arc de cercle défini par ces trois points. Le segment $A_{10}A_{11}$ est un segment de droite. Les autres segments sont des raccords courbes définis par des polynômes paramétriques. Les conditions de continuité aux points de passage imposent un raccord polynomial de degré 5 pour A_6A_7 (6 contraintes aux extrémités de ce segment), des raccords polynomiaux de degré 4 pour les raccords A_3A_4 , A_8A_9 , A_9A_{10} et $A_{11}A_{12}$ (5 contraintes aux extrémités de ces segments). Les autres raccords polynomiaux sont de degré 3.

3.1 Abscisses paramétrique et curviligne

La longueur curviligne du segment $M_k(u)$ est définie par :

$$S_k = \int_{u=0}^{u=u_k} \sqrt{\left\| \frac{dM_k}{du} \right\|^2} du$$

En dehors des cas très particuliers des segments de droite et des arcs de cercle où on a une simple proportionnalité entre l'abscisse paramétrique u et l'abscisse curviligne s , on ne sait pas exprimer la relation qui lie ces abscisses à l'aide de fonctions analytiques simples. Ainsi on évaluera la longueur S_k par l'approximation :

$$S_k = \sum_{i=0}^{i=I-1} \frac{u_k}{I} \sqrt{\left\| \frac{dM_k}{du} \left((i+1/2) \frac{u_k}{I} \right) \right\|^2}$$

avec un nombre d'intervalles I suffisamment grand pour obtenir la précision désirée. Ce calcul effectué avec une expression analytique de $\frac{dM_k}{du}$ donne une excellente approximation (résultat exact, quelque soit I , dans le cas de l'arc de cercle). Il est de loin préférable à l'approximation qui consiste à sommer les cordes.

Le calcul direct de l'abscisse paramétrique en fonction de l'abscisse curviligne dans le cas de raccords polynomiaux de degré supérieur ou égal à 2 n'est pas possible. Les tentatives de modélisation de la relation $u = f(s)$ se révélant décevantes au niveau de la précision, nous préconisons d'effectuer ce calcul par interpolation. On évaluera pour cela les abscisses curvilignes s_1 et s_2 qui encadrent s :

$$\left(s_1 = \sum_{i=0}^{i=I_1-1} \frac{u_k}{I} \sqrt{\left\| \frac{dM_k}{du} \left((i+1/2) \frac{u_k}{I} \right) \right\|^2} \right) < s \leq \left(s_2 = s_1 + \frac{u_k}{I} \sqrt{\left\| \frac{dM_k}{du} \left((I_1+1/2) \frac{u_k}{I} \right) \right\|^2} \right)$$

en utilisant pour I le même nombre d'intervalles que celui qui a servi à calculer S_k afin que le processus d'interpolation redonne bien $u_k = f(S_k)$.

Une simple interpolation linéaire du type $u = u_1 + (s - s_1)(u_2 - u_1)/(s_2 - s_1)$ fournit typiquement une précision relative de l'ordre de 10^{-4} avec un découpage en $I = 50$ intervalles.

Influence de la valeur de u_k sur la forme des courbes. Dans de nombreux cas l'abscisse paramétrique u est le temps. Les valeurs terminales u_k dépendent alors des dates des rendez-vous. Lorsque u est libre, le choix de la valeur u_k se pose. Considérons un segment de courbe $M_k(u)$ dont on impose les points extrêmes A_k et A_{k+1} et les directions des tangentes définies par des vecteurs unitaires τ_k et τ_{k+1} .

Un raccord polynomial du troisième degré :

$$M_k(u) = A_k + B_k u + C_k u^2 + D_k u^3$$

est complètement défini par ces 4 contraintes. Par contre la forme de courbe obtenue va dépendre de la valeur du paramètre libre u_k . Lorsque u_k est très petit devant la corde $d_k = \|A_k A_{k+1}\|$ (qui constitue un ordre de grandeur naturel pour le segment de courbe) la courbe est pratiquement confondue avec le segment rectiligne $A_k A_{k+1}$ pour ne s'en écarter qu'aux extrémités afin de les rejoindre avec la direction imposée par les tangentes. La longueur S_k de la courbe est alors pratiquement égale à d_k . Les courbures prennent des valeurs très grandes (par rapport à $1/d_k$) au voisinage des extrémités ce qui rend la forme obtenue inapte pour des trajectoires où on désire limiter les accélérations centrifuges. Lorsque u_k est très grand devant d_k la courbe effectue une immense boucle, partant en ligne droite de A_k selon la direction de τ_k pour arriver en ligne droite en A_{k+1} selon τ_{k+1} . La courbe obtenue est très longue ce qui rend cette forme inapte en raison de sa longueur.

Il apparaît ainsi qu'il existe une valeur intermédiaire de u_k qui ne présente pas les deux inconvénients précédents, à savoir des courbures ou des longueurs trop importantes. La forme de courbe la plus douce, tout en étant courte, est obtenue lorsque u_k est légèrement supérieur à la corde d_k , tout en étant voisin du S_k résultant. Nous proposons ainsi de prendre $u_k = d_k$ ou mieux :

$$u_k = \frac{4}{3} \left\| \overrightarrow{A_k A_{k+1}} \right\| - \frac{1}{6} \left\langle \overrightarrow{A_k A_{k+1}} \cdot (\vec{\tau}_k + \vec{\tau}_{k+1}) \right\rangle$$

qui constitue une bonne approximation a priori de la longueur curviligne S_k résultante.

3.2 Calcul des polynômes d'interpolation

Le problème posé consiste à calculer N raccords polynomiaux joignant $N+1$ points de passage A_1 à A_{N+1} . Etant donné notre convention sur l'abscisse paramétrique u , ces raccords s'écrivent :

$$M_k(u) = A_k + B_k u + C_k u^2 + D_k u^3 + E_k u^4 + F_k u^5$$

avec A_k donné et B_k, C_k, D_k, E_k et F_k vecteurs inconnus à L composantes. Par ailleurs nous poserons :

$$T_k = \frac{A_{k+1} - A_k}{u_k}$$

3.2.1 Interpolation entre deux points par des polynômes de degré 5

Les coefficients du raccord polynomial de degré 5 $M_1(u)$ qui permet de relier les points A_1 et A_2 , avec des tangentes B_1 et B_2 et des dérivées secondes $\sigma_1 = 2C_1$ et $\sigma_2 = 2C_2$ imposées en ces points sont obtenus par la résolution des équations de continuité. Tous calculs faits, on obtient :

$$\begin{aligned} D_1 &= (C_2 - 3C_1 - 4H + 10G) / u_1 \\ E_1 &= (-C_2 + 3C_1 + 7H - 15G) / u_1^2 \\ F_1 &= (C_2 - C_1 - 3H + 6G) / u_1^3 \end{aligned} \quad \text{avec} \quad \begin{aligned} G &= (T_1 - B_1) / u_1 \\ H &= (B_2 - B_1) / u_1 \end{aligned}$$

3.2.2 Interpolation entre trois points par deux quadriques

Soit à relier trois points A_1, A_2 et A_3 , avec des tangentes B_1 et B_3 et des dérivées secondes $\sigma_1 = 2C_1$ et $\sigma_3 = 2C_3$ imposées aux extrémités A_1 et A_3 . On utilise pour cela deux raccords polynomiaux de degré 4 $M_1(u)$ et $M_2(u)$. Les équations aux contraintes permettent de calculer les vecteurs inconnus. Tous calculs faits on trouve :

$$B_2 = \frac{(C_3 - C_1) u_1 u_2 / 3 + (2T_1 - B_1) u_2 + (2T_2 - B_3) u_1}{u_1 + u_2}$$

$$C_2 = \frac{C_3 u_2 + C_1 u_1 - 3B_3 + 3B_1 + 6T_2 - 6T_1}{u_1 + u_2}$$

$$D_1 = (4T_1 - B_2 - 3B_1 - 2C_1 u_1) / u_1^2$$

$$D_2 = (4T_2 - B_3 - 3B_2 - 2C_2 u_2) / u_2^2$$

$$E_1 = (-3T_1 + B_2 + 2B_1 + C_1 u_1) / u_1^3$$

$$E_2 = (-3T_2 + B_3 + 2B_2 + C_2 u_2) / u_2^3$$

3.2.3 Interpolation par splines cubiques

L'algorithme de calcul de N raccords polynomiaux de degré 3 passant par $N+1$ points A_i est un classique [Ahlb 67] dans le cas où les conditions à une des limites sont les suivantes :

- seule la dérivée première est donnée (B_1 et/ou B_{N+1} donnés),
- seule la dérivée seconde est donnée ($\sigma_1 = 2C_1$ et/ou $\sigma_{N+1} = 2C_{N+1}$ donnés),
- même raccord cubique sur les deux premiers et/ou deux derniers raccords (condition noeud fictif : dérivée troisième nulle en A_2 et/ou en A_N). Les conditions initiale et terminale sont indépendantes l'une de l'autre.

Nous avons étendu [Llib 93] cet algorithme en prenant en compte le cas où les dérivées première et seconde sont simultanément imposées au début et/ou à la fin de la trajectoire. Pour cela nous modifions la numérotation des points et considérons que ces conditions sont imposées au point A_0 (ou A_{N+2}) et nous utilisons pour le segment A_0A_1 (respectivement $A_{N+1}A_{N+2}$) un raccord polynomial du quatrième degré $M_0(u)$ (respectivement $M_{N+1}(u)$) de manière à ce que N représente toujours le nombre de raccords cubiques entre les points A_1 et A_{N+1} .

La résolution des équations traduisant les contraintes conduit au système tridiagonal suivant :

$$\begin{pmatrix} b_1 & c_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & b_3 & c_3 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{N-1} & b_{N-1} & c_{N-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_N & b_N & c_N \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a_{N+1} & b_{N+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B'_1 \\ B'_2 \\ B'_3 \\ \cdot \\ B'_{N-1} \\ B'_N \\ B'_{N+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H'_1 \\ H'_2 \\ H'_3 \\ \cdot \\ H'_{N-1} \\ H'_N \\ H'_{N+1} \end{pmatrix}$$

où les scalaires a_i , b_i , c_i et les coefficients vectoriels H_i sont donnés pour $i = 1$ et $i = N+1$ par :

	tangente donnée	courbure donnée ¹	noeud-fictif	raccord 4 ²
b_1	1	2	u_2	$2u_0 + 3u_1$
c_1	0	1	$u_1 + u_2$	u_0
H_1	B_1	$3T_1 - d_1C_1$	$\frac{u_2(3u_1 + 2u_2)T_1 + u_1^2T_2}{u_1 + u_2}$	$3u_0T_1 + 6u_1T_0 - 3u_1B_0 - u_0u_1C_0$
a_{N+1}	0	1	$u_{N-1} + u_N$	u_{N+1}
b_{N+1}	1	2	u_{N-1}	$2(u_N + u_{N+1})$
H_{N+1}	B_{N+1}	$3T_N + d_NC_{N+1}$	$\frac{u_N^2T_{N-1} + u_{N-1}(3u_N + 2u_{N-1})T_N}{u_{N-1} + u_N}$	$3(u_{N+1}T_N + u_NT_{N+1}) - u_NB_{N+2}$

¹ La direction de la tangente étant libre, spécifier une valeur de courbure non nulle ne présente a priori aucun intérêt pratique. En conséquence, on donnera à C_1 et à C_{N+1} des valeurs nulles.

² Raccord par un segment polynomial du quatrième degré ayant tangente et courbure imposées à son extrémité.

et pour $i = 2$ à N par :

$$\begin{aligned} a_i &= u_i \\ b_i &= 2(u_{i-1} + u_i) \\ c_i &= u_{i-1} \\ H_i &= 3(u_i T_{i-1} + u_{i-1} T_i) \end{aligned}$$

Le système tridiagonal se résout en deux itérations (vectorielles sur les L composantes) qui fournissent les vecteurs B_i . Les autres coefficients vectoriels inconnus C_i et D_i sont obtenus (pour $i = 1, N$) par les relations :

$$C_i = (3T_i - 2B_i - B_{i+1}) / u_i$$

$$D_i = (B_i + B_{i+1} - 2T_i) / u_i^2$$

Dans le cas de l'adjonction de polynômes supplémentaires du 4ème degré pour satisfaire des contraintes simultanées en tangente et courbure à une des extrémités, les coefficients vectoriels inconnus D_0 et E_0 sont obtenus par les relations :

$$D_0 = (4T_0 - 2C_0 u_0 - 3B_0 - B_1) / u_0^2$$

$$E_0 = (-3T_0 + C_0 u_0 + 2B_0 + B_1) / u_0^3$$

et les coefficients C_{N+1} , D_{N+1} et E_{N+1} par les relations :

$$C_{N+1} = (6T_{N+1} - 3B_{N+1} - 3B_{N+2} + C_{N+2} u_{N+1}) / u_{N+1}$$

$$D_{N+1} = (-8T_{N+1} + 3B_{N+1} + 5B_{N+2} - 2C_{N+2} u_{N+1}) / u_{N+1}^2$$

$$E_{N+1} = (3T_{N+1} - B_{N+1} - 2B_{N+2} + C_{N+2} u_{N+1}) / u_{N+1}^3$$

Splines lissantes. On trouve dans [Boor 78] un algorithme de calcul de splines cubiques avec un effet de lissage plus important obtenu en relâchant les contraintes de passage aux points. A chaque point A_i est associée une précision de passage δA_i (qui peut être nulle si on désire un passage exact par le point). La tolérance δA_i est utilisée pour minimiser l'intégrale du carré de la dérivée seconde le long de la trajectoire. Nous avons étendu cet algorithme en ajoutant des raccords extrêmes du quatrième degré pour les cas où on impose les dérivées première et seconde aux extrémités. Les résultats sont présentés dans [Llib 93].

3.3 Les différents types d'abscisse paramétrique

De nombreux algorithmes sur les splines utilisent une abscisse paramétrique sans dimension, avec la même valeur terminale $u_k = 1$ pour tous les segments ce qui simplifie considérablement tous les calculs. Les courbes obtenues au moyen de ces algorithmes présentent des maximums de courbure nettement plus forts que ceux que l'on obtient en adaptant u_k à la taille des segments.

Dans les problèmes de trajectoires, on peut utiliser le temps t écoulé sur un segment comme abscisse paramétrique. Si on note d_k la date de passage au point A_k , on aura $u = t = d - d_k$ sur le segment numéro k , avec $u_k = t_k = d_{k+1} - d_k$. Dans ce cas les vitesse et accélération sont totalement imposées sur la trajectoire par les algorithmes utilisés et par les valeurs attribuées aux dérivées première (vitesse) et seconde (accélération) aux jonctions entre raccords polynomiaux et autres segments. Le non dépassement de valeurs maximales en vitesse et accélération ne pourra être vérifié qu'a posteriori. Si ces contraintes sont vérifiées, ce choix conduit à des algorithmes de génération de trajectoire de qualité qui sont extrêmement simples.

Lorsque le choix précédent n'est pas possible, nous préconisons d'utiliser comme abscisse paramétrique une variable u dont la dimension est celle de la distance entre les points de passage, et dont les valeurs terminales sont voisines de celle des cordes des segments.

4 DEFINITION DE LOIS DE MOUVEMENT CONTINUES EN ACCELERATION

Les techniques présentées au chapitre précédent permettent de spécifier la forme géométrique de la trajectoire. Lorsque u n'est pas directement lié au temps, il faut établir une loi de mouvement paramétrique $u = f(t)$, pour pouvoir effectuer la génération des points de la trajectoire. Cette correspondance peut aussi résulter d'une loi de mouvement curviligne $s = f(t)$ suivie d'une interpolation de u en fonction de s .

La définition de ces lois doit prendre en compte des conditions aux limites et des contraintes. Celles-ci seront traduites en conditions aux limites sur s , ds/dt et d^2s/dt^2 et les contraintes seront traduites en contraintes en valeurs maximales sur ds/dt , d^2s/dt^2 et d^3s/dt^3 . Dans le cas d'une loi $u = f(t)$, il faudra effectuer une traduction supplémentaire pour les convertir en conditions aux limites sur u , du/dt et d^2u/dt^2 et en contraintes en valeurs maximales sur du/dt , d^2u/dt^2 et d^3u/dt^3 . Chaque traduction de contrainte étant effectuée par une procédure de type minimax, la loi $u = f(t)$ sera plus sous-optimale que la loi $s = f(t)$.

Remarque : Seules les contraintes tangentielles sont prises en compte au niveau de la loi de mouvement. Si des contraintes de type différent existent et ne peuvent être traduites en contraintes tangentielles, elles devront être vérifiées à posteriori. Examinons par exemple le cas d'une accélération globale maximale A_G . On peut limiter l'accélération tangentielle à μA_G avec μ légèrement inférieur à 1 et examiner à posteriori si l'accélération globale est inférieure à A_G . Ceci sera le cas si les phases à accélération maximale correspondent à des portions à courbure ou vitesse faibles. Si V représente la vitesse maximale donnée, l'accélération normale sera inférieure ou égale à $A_N = c_{\max} V^2$ (la courbure maximale c_{\max} est connue car la forme géométrique est déjà fixée). En limitant l'accélération tangentielle à $A_T = \sqrt{A_G^2 - A_N^2}$ on est certain de ne pas dépasser l'accélération globale maximale, mais on risque d'être très sous-optimal.

4.1 Loi de mouvement en temps minimal

Pour définir une loi de mouvement admissible, nous proposons de partir de la base fournie par la loi de mouvement optimale en temps qui satisfait les conditions aux limites et les contraintes. Si cette loi fournit une durée supérieure au temps de parcours alloué, le mouvement n'est pas réalisable. Dans le cas contraire la loi optimale en temps peut être déformée pour occuper toute la durée allouée.

D'un point de vue théorique, il faut résoudre le problème de la commande optimale en temps minimum, pour le système du troisième ordre :

$$\frac{d^3x}{dt^3} = u$$

afin de passer d'un état initial quelconque $M(x, y = \dot{x}, z = \ddot{x})$ à un état final $M_0(x_0, y_0 = \dot{x}_0, z_0 = \ddot{x}_0)$ également quelconque avec les contraintes suivantes :

$$0 \leq y = \dot{x} \leq V$$

$$-G \leq z = \ddot{x} \leq G$$

$$-D \leq u \leq D$$

L'application du principe du maximum à ce problème et l'analyse des trajectoires dans l'espace de phase permettent de montrer que la trajectoire optimale en temps présente un maximum de six commutations (sept phases) qui se succèdent dans l'ordre suivant (les flèches indiquent la croissance ou la décroissance de la variable considérée) :

	1	2	3	4	5	6	7
u	+D	0	-D	0	-D	0	+D
z	↑	+G	↓	0	↓	-G	↑
y	↑	↑	↑	V	↓	↓	↓

Ces différentes trajectoires de phase sont représentées sur la figure 5 dans le cas particulier le plus simple : $M_0(0,0,0)$.

Nous donnons ci-après les résultats qui permettent de calculer la séquence exacte des commutations. La justification de ces résultats, qui est relativement calculatoire, se trouve dans [Llib 94]. Pour simplifier les expressions nous poserons :

$$T_A = \frac{G}{D} \quad , \quad Y_A = \frac{1}{2}DT_A^2 \quad , \quad X_A = -\frac{1}{6}DT_A^3$$

La dernière phase (7) se fait selon la trajectoire T_{fin} arrivant en $M_0(x_0, y_0, z_0)$ avec $u = +D$. En remontant le temps depuis M_0 , cette trajectoire n'est valable que jusqu'au point $M_1 = A(x_A, y_A, z_A)$ tel que $z_A = -G$. Il vient :

$$z_A = -Dt_A + z_0 = -G \quad \Rightarrow \quad t_A = \frac{G + z_0}{D}$$

$$y_A = \frac{1}{2}Dt_A^2 - z_0t_A + y_0 \quad , \quad x_A = -\frac{1}{6}Dt_A^3 + \frac{1}{2}z_0t_A^2 - y_0t_A + x_0$$

Cette dernière phase peut être précédée soit par une phase 6 où z est saturé à $-G$ avec $u = 0$, ou directement (pas de phase 6) par une phase 5 avec $u = -D$. Dans ce dernier cas, partant d'un point $M(x, y, z)$ sur la trajectoire de phase 5, on a les durées suivantes pour les phases 5 (t_{mD0}) et 7 (t_{D0}) :

$$t_{mD0} = \frac{z}{D} + \sqrt{\frac{z^2 + z_0^2 + 2D(y - y_0)}{2D^2}}$$

$$t_{D0} = \frac{z_0}{D} + \sqrt{\frac{z^2 + z_0^2 + 2D(y - y_0)}{2D^2}}$$

Le lieu des points $M(x, y, z)$ engendré par ces trajectoires (phase 5 aboutissant directement sur T_{fin}) constitue la surface de commutation S_{urf1} d'équation :

$$S_{urf1}(x, y, z) = x - x_0 + \frac{yz + y_0z_0}{D} + \frac{z^3 + 3z^2z_0 + 6zz_0^2 + 2z_0^3}{3D^2} + \frac{1}{2D^2}(z^2 - z_0^2 + 2Dy) \sqrt{z^2 + z_0^2 + 2D(y - y_0)} = 0$$

Dans le cas où la phase 7 remonte jusqu'à $z = +G$, elle sera précédée par la phase 6 dont la trajectoire T_{Gfin} est une parabole dans le plan $z = +G$. Le lieu des points $M(x, y, z)$ engendré par les trajectoires de phase 5 ($u = -D$) qui aboutissent sur T_{Gfin} constitue la surface de commutation S_{urf2} d'équation :

$$S_{urf2}(x, y, z) = x - x_A + \frac{y^2 - y_A^2}{2G} + \frac{D}{2G} \left(\frac{z + G}{D} \right)^2 \left(y + \frac{z + G}{D} \cdot \frac{3z - G}{12} \right) = 0$$

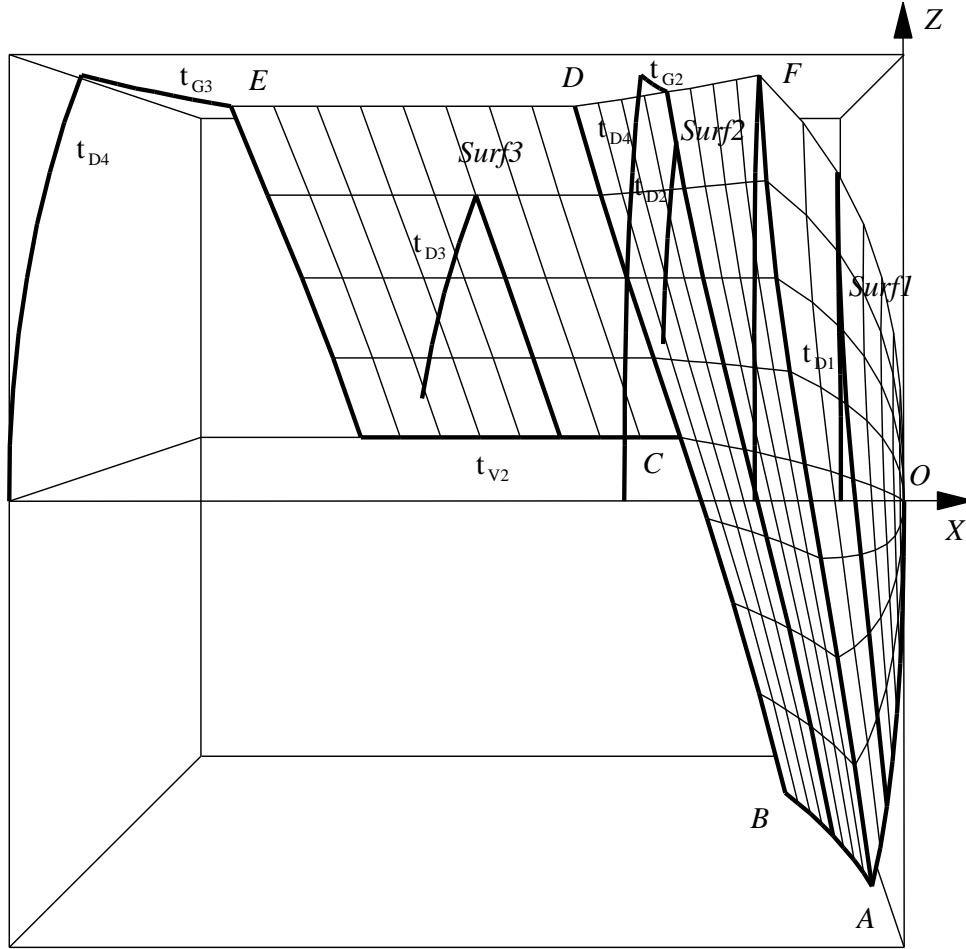


Figure 5 : Trajectoires temps minimum et surfaces de commutation

La phase 5 peut être directement précédée par une phase 1 à $u = +D$ qui, partant du point $M(x, y, z)$ aboutit sur un point de la surface S_{urf1} (ou de la surface S_{urf2}). Dans ce cas la durée t_{D1} (respectivement t_{D2}) de cette phase sera obtenue en cherchant la première racine positive en t de l'équation $S_{urf1}(x^+, y^+, z^+) = 0$ (respectivement $S_{urf2}(x^+, y^+, z^+) = 0$) avec :

$$z^+ = z + Dt \quad , \quad y^+ = y + zt + \frac{1}{2}Dt^2 \quad , \quad x^+ = x + yt + \frac{1}{2}zt^2 + \frac{1}{6}Dt^3$$

t_{D1} et t_{D2} sont solutions de polynômes en t qui sont respectivement du sixième et du quatrième degré. Seule l'une de ces deux quantités doit être calculée (cf algorithme figure 7). t_{D2} peut être calculé par les formules de Ferrari. t_{D1} peut être calculé par une procédure itérative de type Newton-Raphson.

La phase 5 peut être précédée par une phase 4 saturée en vitesse à $y = V$ et $z = u = 0$. Sa durée t_{V2} à partir d'un point $M(x, V, 0)$ vaut :

$$t_{V2} = \frac{x_C - x}{V} \quad \text{avec} \quad x_C = -\frac{V}{2} \left(\frac{V}{G} + T_A \right) + x_A + \frac{y_A^2}{2G} - \frac{1}{4}X_A$$

Les trajectoires de phase 3 conduisent sur la trajectoire de phase 4 ($y = V, z = 0$) en utilisant la commande $u = -D$. Les trajectoires de phase 3 constituent la surface de commutation S_{urf3} d'équation :

$$2D(y-V) + z|z| = 0$$

Une trajectoire de phase 1 (avec $u = +D$) peut directement précéder une trajectoire de phase 3 (absence de phase 2). Dans ce cas la durée t_{D3} sur cette trajectoire de phase 1, à partir d'un point $M(x, y, z)$, est de :

$$t_{D3} = \frac{-z + \sqrt{\frac{1}{2}z^2 + D(V-y)}}{D}$$

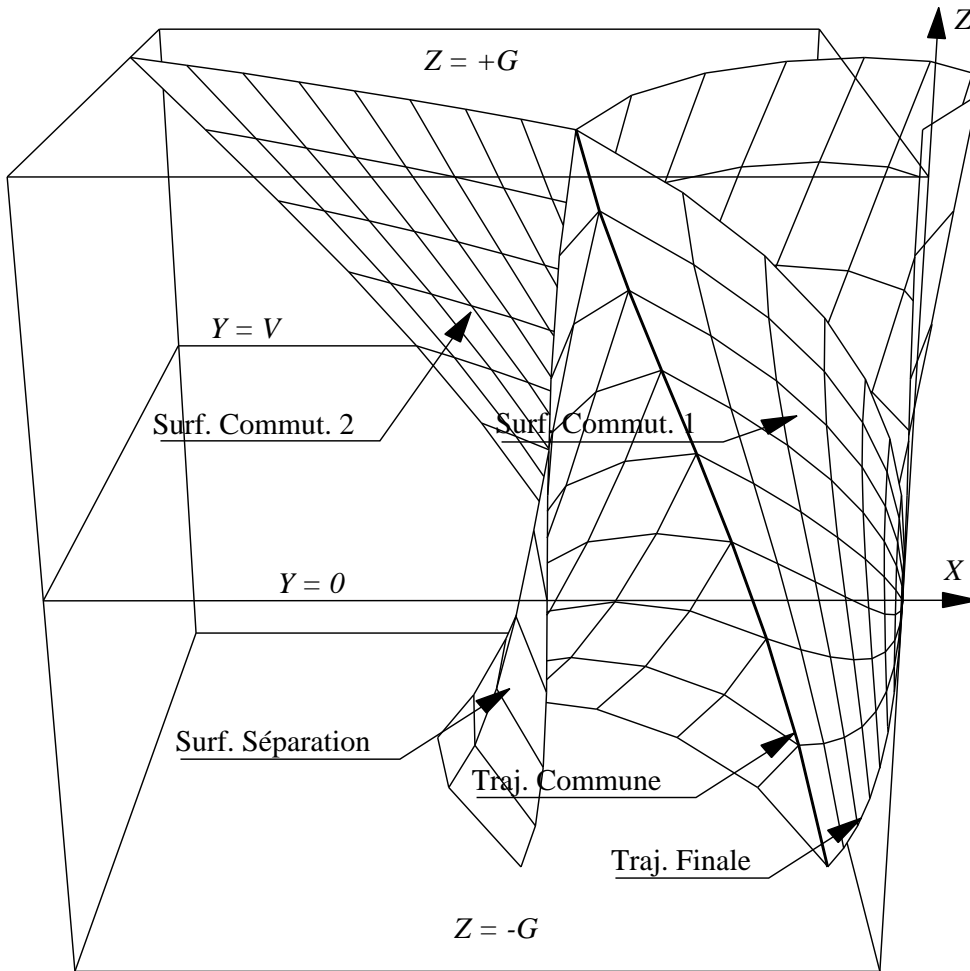


Figure 6 : *Séparation entre surfaces de commutation 1 et 2*

Les trajectoires de phase 3 (qui constituent la surface de commutation S_{urf3}) seront généralement précédées par une trajectoire de phase 2 saturée en accélération ($z = G, u = 0$). Partant d'un point $M(x, y, z)$, la durée t_{G3} de cette trajectoire de phase 2 vaut :

$$t_{G3} = \frac{V-y}{G} - \frac{G}{2D}$$

Ces trajectoires atteignent S_{urf3} en un point E d'abscisse :

$$X_E = x + yt_{G3} + \frac{1}{2}zt_{G3}^2$$

On peut également avoir des trajectoires de phase 2 (saturées en accélération $z = G, u = 0$) qui atteignent directement des trajectoires de phase 5 (la surface de commutation S_{urf2}). Partant d'un point $M(x, y, z)$, la durée t_{G2} de ces trajectoires de phase 2 vaut :

$$t_{G2} = \frac{-(y + 2Y_A) + \sqrt{(y + 2Y_A)^2 - \frac{1}{2}(y^2 - y_A^2) + G(x - x_A - 4X_A + 2yT_A)}}{G}$$

Appelons D le point d'intersection des surfaces $z = G, S_{urf3}$ et S_{urf2} qui est commun à ces deux types de trajectoires de phase 2. Son abscisse vaut :

$$X_D = x_A - \frac{5}{4}X_A + \frac{y_A^2}{2G} - \frac{V}{2} \left(\frac{V}{G} + 3T_A \right)$$

Enfin, les trajectoires de phase 2 sont précédées par des trajectoires de phase 1 de durée $t_{D4} = \frac{G-z}{D}$ entre le point de départ $M(x, y, z)$ et le plan $z = G$.

SI $x \in (X_{S1}, X_{S2})$ **ALORS** $S_{epar} = 1$ et $T_1 = t_{D1}$ **SINON** $S_{epar} = 2$ et $T_1 = t_{D2}$

SI $T_1 < 0$ **OU** $t_{D3} < 0$ **OU** $t_{D4} < 0$ **ALORS FIN** ("Point initial hors domaine autorisé")

SI $t_{D4} < T_1$ **ET** $t_{D4} < t_{D3}$ **ALORS** ("La phase 2 avec z saturé à $+G$ existe")

$T_1 = t_{D4}, M = M(u = D, \Delta t = T_1)$
 $T_2 = t_{TG3}$

SI $X_E > X_D$ **ALORS** ("Vitesse maximale non atteinte : pas de phases 3 ni 4")
 $T_2 = t_{G2}, M = M(u = 0, \Delta t = T_2)$
 $T_3 = T_4 = 0, T_5 = 2T_A, y = y + zT_5 - \frac{1}{2}DT_5^2$
 $T_6 = \frac{y - y_A}{G}$ et $T_7 = t_A$

SINON ("Toutes les phases sont présentes")
 $M = M(u = 0, \Delta t = T_2)$
 $T_3 = T_A$ et $M = M(u = -D, \Delta t = T_3)$ ("Arrivée en $y = V$ ")
 $T_4 = t_{V2}, T_5 = T_A, T_6 = \frac{V - Y_A - y_A}{G}, T_7 = t_A$

SINON ("Pas de phase 2 saturée à $z = G$ ")

SI $t_{D3} < T_1$ **ALORS** ("Présence phase 4 saturée à $y = V$ ")
 $T_1 = t_{D3}$ et $M = M(u = +D, \Delta t = T_1)$
 $T_2 = 0, T_3 = \frac{z}{D}$ et $M = M(u = -D, \Delta t = T_3)$
 $T_4 = t_{V2}, T_5 = T_A, T_6 = \frac{V - Y_A - y_A}{G}, T_7 = t_A$

SINON ("Absence phase 4")

SI $S_{epar} = 2$ **ALORS** ("Présence phase 6 à $z = -G$ ")
 $M = M(u = D, \Delta t = T_1)$ ("Arrivée sur S_{urf2} ")
 $T_2 = T_3 = T_4 = 0, T_5 = \frac{z}{D} + T_A$ et $y = y + zT_5 - \frac{1}{2}DT_5^2$
 $T_6 = \frac{y - y_A}{G}$ et $T_7 = t_A$

SINON ("Absence phase 6")
 $M = M(u = D, \Delta t = T_1)$ ("Arrivée sur S_{urf1} ")
 $T_2 = T_3 = T_4 = T_6 = 0, T_5 = t_{mD0}, T_7 = t_{D0}$

Figure 7. Algorithme temps minimum pour une système du 3ème ordre

Les trajectoires de phase 1 peuvent amener sur une trajectoire de phase 2, de phase 3, de phase 5 ou de phase 6. La discrimination entre ces différents cas ne pose un problème que pour les deux derniers. Les surfaces de commutations S_{urf1} et S_{urf2} s'intersectent suivant la trajectoire de phase 5 qui arrive au point A. Les trajectoires de phase 1 qui précèdent directement cette trajectoire particulière de phase 5, constituent une surface frontière d'équation :

$$S_{separ}(x, y, z) = x - X_{S1}(y, z) = 0$$

avec

$$X_{S1}, X_{S2} = x_A - \frac{1}{3}D \left(t^3 - \frac{(t+t_2)^3}{2} \right) + \frac{1}{2}z_A(t+t_2)^2 - y_A(t+t_2)$$

et

$$t = -\frac{z}{D} \pm \sqrt{\frac{z_A^2 + z^2}{2D^2} + \frac{y_A - y}{D}} \quad , \quad t_2 = t + \frac{z - z_A}{D}$$

La figure 6 représente cette surface de séparation dans le cas particulier le plus simple : $M_0(0,0,0)$. Notons $M = M(u, \Delta t)$ les équations d'évolution sur la trajectoire de phase :

$$z = z + u\Delta t \quad ; \quad y = y + z\Delta t + \frac{1}{2}u\Delta t^2 \quad ; \quad x = x + y\Delta t + \frac{1}{2}z\Delta t^2 + \frac{1}{6}u\Delta t^3$$

Il résulte de l'analyse précédente l'algorithme de détermination des durées T_i des sept phases, détaillé figure 7.

Remarque : Cet algorithme peut être utilisé dans le cas d'une commande en boucle fermée. Il est alors inutile de calculer la durée des différentes phases. L'algorithme appelé à chaque période d'échantillonnage ne sert qu'à déterminer la première commande à appliquer.

4.2 Loi de mouvement en temps imposé

On se pose le problème de définir la trajectoire qui permet d'atteindre un point final $M_7(x_7, y_7, z_7)$ à partir d'un point initial $M_0(x_0, y_0, z_0)$ en respectant des contraintes en vitesse ($0 < y \leq V$), accélération ($|z| \leq G$) et jerk ($|\frac{d}{dt}z| \leq D$), et ceci avec une durée imposée T_{tot} .

L'algorithme défini au paragraphe précédent permet de trouver la trajectoire en temps minimal $T_{min} = \sum_{k=1}^7 T_k$. Cette trajectoire est complètement définie par son point de départ et par les 7 couples (u_k, T_k) où u_k est la valeur du jerk maintenu constant pendant la durée T_k : $(+D, T_1)$, $(0, T_2)$, $(-D, T_3)$, $(0, T_4)$, $(-D, T_5)$, $(0, T_6)$ et $(+D, T_7)$.

Si $T_{tot} \leq T_{min}$ le problème de rendez-vous en temps imposé admet une infinité de solutions. Dans cette infinité, nous choisissons celle qui se déduit de la trajectoire en temps minimal par une dilatation temporelle de rapport $a = T_{tot}/T_{min}$. Pour cela nous multiplions les commandes u_k par un coefficient α_k et posons $\tau_k = aT_k$. Il vient :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^7 \alpha_k u_k \tau_k &= z_7 - z_0 \\ \sum_{k=1}^7 \alpha_k u_k \tau_k \left(\frac{1}{2} \tau_k + \sum_{i=k}^6 \tau_{i+1} \right) &= y_7 - y_0 - z_0 T_{tot} \\ \frac{1}{6} \sum_{k=1}^7 \alpha_k u_k \tau_k \left[\left(\sum_{i=k}^7 \tau_i \right)^2 + \left(\sum_{i=k}^7 \tau_i \right) \left(\sum_{i=k}^6 \tau_{i+1} \right) + \left(\sum_{i=k}^6 \tau_{i+1} \right)^2 \right] &= x_7 - x_0 - y_0 T_{tot} - \frac{1}{2} z_0 T_{tot}^2 \end{aligned}$$

Pour que la nouvelle loi de mouvement procure un palier à vitesse constante en phase 4, on considérera l'équation supplémentaire :

$$\sum_{k=1}^3 \alpha_k u_k \tau_k = -z_0$$

Les conditions écrites constituent un système de 4 équations linéaires à 4 inconnues $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_5$ et α_7 (car α_2, α_4 et α_6 n'interviennent pas étant donné que $u_2 = u_4 = u_6 = 0$). On notera qu'il est préférable de résoudre ce système en considérant les inconnues auxiliaires $v_k = \alpha_k u_k \tau_k$.

Validité de la solution : Il faut s'assurer que la solution trouvée respecte les contraintes, à savoir :

$$-1 \leq \alpha_i \leq 1$$

$$\left| z_n = z_0 + \sum_{k=1}^n \alpha_k u_k \tau_k \right| < G \text{ pour } n = 1, 3 \text{ et } 5$$

$$\left[y_3 = y_0 + z_0 \sum_{k=1}^3 \tau_k + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 \alpha_k u_k \tau_k \left(\tau_k + 2 \sum_{i=k+1}^3 \tau_i \right) \right] \geq 0$$

Si y_3 est négatif, c'est que le temps imposé est extrêmement long, relativement au comportement induit par les conditions aux limites imposées (vitesses et accélérations initiales et finales données). Dans ce cas il faut intercaler, entre x_0 et x_7 , un point d'arrêt avec une durée suffisante.

5 PARAMETRISATION DES TRAJECTOIRES EN ATTITUDE

L'adéquation d'un système de paramétrage à représenter des attitudes, dans le cas particulier de la définition et génération de trajectoires, repose principalement sur le fait que l'interpolation d'attitudes intermédiaires entre deux attitudes quelconques fournit un résultat indépendant du choix de l'origine des attitudes. Cette propriété est obtenue lorsque la relation entre le vecteur vitesse de rotation et la dérivée du système de représentation des attitudes est régulière et homogène dans tout l'espace des attitudes. C'est cette propriété que nous allons analyser pour les systèmes de représentations les plus utilisés.

Dans ce qui suit, les paramètres du système de représentation analysé seront parfois interprétés comme des coordonnées repérant une base \mathcal{B}_M par rapport à une base de référence \mathcal{B}_0 , et d'autre fois comme des composantes de l'opérateur transformant \mathcal{B}_0 en \mathcal{B}_M .

5.1 Systèmes angulaires

Les angles traditionnels d'Euler constituent un système de paramétrage sans rival pour l'étude des équations du mouvement autour du centre de gravité d'un corps solide. Ce système a permis de mettre en évidence les mouvements de Lagrange-Poisson et d'Euler-Poinsot. Il est par contre très mal adapté comme système de repérage, car il est singulier en configuration origine (angle de nutation nul).

En marine et en aéronautique, on utilise un système d'angles de type azimut (ψ), assiette (θ), roulis (ϕ), qui est sans égal aux petits angles, mais qui devient inutilisable dès que l'assiette approche $\pi/2$.

Ces systèmes étant bien connus, nous ne les incluons pas davantage dans notre analyse.

5.2 Les systèmes à 3 composantes basés sur les paramètres d'Euler

Un théorème d'Euler stipule que quelques soient 2 bases orthonormées \mathcal{B}_0 et \mathcal{B}_M de l'espace physique, il existe une rotation unique qui permet d'aligner \mathcal{B}_0 sur \mathcal{B}_M . On appelle paramètres d'Euler le couple formé par l'angle α de cette rotation unique et par le vecteur unitaire \vec{u} de l'axe de cette rotation. Nous noterons $\mathcal{R}_{\alpha, u}$ cette rotation. Ses composantes (en représentation matricielle 3x3) sont données par la relation classique :

$$\mathcal{R}_{\alpha, u} = 1 + s_\alpha \tilde{u} + (1 - c_\alpha) \tilde{u}^2$$

où $c_\alpha = \cos(\alpha)$, $s_\alpha = \sin(\alpha)$ et où \tilde{u} représente le tenseur antisymétrique associé à \vec{u} .

Le vecteur propre rotation : Nous appellerons vecteur propre rotation le vecteur :

$$\vec{A} = \alpha \vec{u}$$

Lorsque \mathcal{B}_0 est proche de \mathcal{B}_M , ses composantes sont quasiment égales aux angles ψ, θ, ϕ (dans un certain ordre).

Les paramètres de rotation finie : Certains auteurs nomment paramètres de rotation finie les composantes du vecteur $\vec{\tau} = \tan \frac{\alpha}{2} \vec{u}$. Ces paramètres ont l'avantage sur le vecteur rotation de conduire à une relation de composition et à des relations cinématiques plus simples. Par contre ils ont l'inconvénient d'être non définis lorsque l'angle de la rotation vaut π .

Paramètres d'Olinde-Rodrigues : Certains auteurs appellent paramètres d'Olinde-Rodrigues la partie pure du quaternion de Hamilton que nous noterons $\vec{\eta} = \sin \frac{\alpha}{2} \vec{u}$.

Projection stéréographique du quaternion : La projection stéréographique du quaternion sur l'hyperplan perpendiculaire à l'extrémité du quaternion de référence $-Q_{ref} = (-1, 0, 0, 0)$ est utilisée comme repérage des attitudes dans [Tsio 94]. On considère le vecteur :

$$\vec{\sigma} = \frac{\text{Pur}(Q)}{1 + \text{Scalaire}(Q)} = \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{1 + \cos \frac{\alpha}{2}} \vec{u} = \tan \frac{\alpha}{4} \vec{u}$$

Cette représentation est singulière pour $\alpha = 2\pi$.

Remarque : les deux couples (α, \vec{u}) et $(-\alpha, -\vec{u})$ qui représentent la même rotation conduisent au même système à 3 composantes.

Composition de rotations. Considérons une première rotation $\mathcal{R}_A = \mathcal{R}_{\alpha,u}$ qui transforme la base \mathcal{B}_0 en \mathcal{B}_1 , une deuxième $\mathcal{R}_B = \mathcal{R}_{\beta,v}$ qui amène \mathcal{B}_1 en \mathcal{B}_2 , et une troisième rotation $\mathcal{R}_C = \mathcal{R}_{\gamma,w}$ qui amène directement \mathcal{B}_0 en \mathcal{B}_2 . A ces trois rotations nous associons trois vecteurs de repérage des attitudes \vec{V}_A, \vec{V}_B et \vec{V}_C (où \vec{V} représente un des 4 vecteurs $\vec{A}, \vec{\tau}, \vec{\eta}$ ou $\vec{\sigma}$). Les formules qui permettent de calculer \vec{V}_C en fonction de \vec{V}_A et \vec{V}_B ne sont simples que dans le cas de $\vec{\tau}$ et $\vec{\eta}$:

$$\vec{\tau}_C = \frac{1}{(1 - \langle \vec{\tau}_B, \vec{\tau}_A \rangle)} (\vec{\tau}_B + \vec{\tau}_A + \vec{\tau}_B \wedge \vec{\tau}_A)$$

$$\vec{\eta}_C = c_{\alpha/2} \vec{\eta}_B + c_{\beta/2} \vec{\eta}_A + \vec{\eta}_B \wedge \vec{\eta}_A$$

Dans le cas de \vec{A}_C et $\vec{\sigma}_C$ il est plus simple de passer par l'intermédiaire du calcul de γ et \vec{w} :

$$c_{\gamma/2} = c_{\alpha/2} c_{\beta/2} - s_{\alpha/2} s_{\beta/2} \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$$

$$s_{\gamma/2} \vec{w} = c_{\beta/2} s_{\alpha/2} \vec{u} + c_{\alpha/2} s_{\beta/2} \vec{v} + s_{\alpha/2} s_{\beta/2} \vec{v} \wedge \vec{u}$$

Ces formules sont vectorielles, c'est-à-dire qu'elles supposent que les composantes de tous les vecteurs sont exprimées dans une même base de projection.

Relations entre vecteur vitesse instantanée de rotation et dérivée de \vec{V} . Posons :

$$\vec{\Omega}_{OM} = \mathcal{K}_V \left(\frac{d}{dt} \vec{V} \right) \quad \text{et} \quad \frac{d}{dt} \vec{V} = \mathcal{L}_V (\vec{\Omega}_{OM})$$

où \vec{V} repère l'attitude de \mathcal{B}_M relativement à celle de \mathcal{B}_0 et où $\vec{\Omega}_{OM}$ est le vecteur vitesse instantanée de rotation de \mathcal{B}_M relativement à \mathcal{B}_0 . Les expressions des opérateurs \mathcal{K} et \mathcal{L} pour les systèmes analysés sont les suivantes [Llib 92] :

$$\mathcal{K}_A = \mathbf{1} + \frac{1 - c_\alpha}{\alpha} \tilde{u} + \left(1 - \frac{s_\alpha}{\alpha}\right) \tilde{u}^2 \quad ; \quad \mathcal{L}_A = \mathbf{1} - \frac{\alpha}{2} \tilde{u} + \left(1 - \frac{\alpha}{2} \text{ctg} \frac{\alpha}{2}\right) \tilde{u}^2$$

$$\mathcal{K}_\tau = (1 + c_\alpha) \mathbf{1} + s_\alpha \tilde{u} = 2c_{\alpha/2}^2 (\mathbf{1} + \tilde{\tau}) \quad ; \quad \mathcal{L}_\tau = \frac{1}{4c_{\alpha/2}^2} [\mathbf{1} + \mathcal{R}_{\alpha,-u}]$$

$$\mathcal{K}_\eta = \frac{1}{c_{\alpha/2}} [\mathbf{1} + \mathcal{R}_{\alpha,u}] \quad ; \quad \mathcal{L}_\eta = \frac{1}{2} c_{\alpha/2} [\mathbf{1} - t_{\alpha/2} \tilde{u}]$$

$$\mathcal{K}_\sigma = 4c_{\alpha/4}^2 \mathcal{R}_{\frac{\alpha}{2},-u} \quad ; \quad \mathcal{L}_\sigma = \frac{1}{4c_{\alpha/4}^2} \mathcal{R}_{\frac{\alpha}{2},u}$$

avec $t_{\alpha/2} = \tan \frac{\alpha}{2}$.

Remarque 1 : Les expressions données concernent la dérivation de \vec{V} relativement à la base \mathcal{B}_0 . Pour obtenir les expressions des opérateurs \mathcal{K} et \mathcal{L} qui correspondent à une dérivation relativement à la base \mathcal{B}_M , il suffit de remplacer u par $-u$ ou α par $-\alpha$ dans les formules.

Remarque 2 : Les opérateurs \mathcal{K} et \mathcal{L} sont inverses l'un de l'autre :

$$\mathcal{K}_V \circ \mathcal{L}_V = \mathcal{L}_V \circ \mathcal{K}_V = \mathbf{1}$$

Remarque 3 : Du fait que \vec{V} est le vecteur propre de $\mathcal{R}_{\alpha,u}$ associé à la valeur propre 1, $\vec{V} = \mathcal{R}_{\alpha,u}(\vec{V})$, on déduit par dérivation que :

$$\frac{d}{dt}_{/M} \vec{V} = \mathcal{R}_{\alpha,u} \left(\frac{d}{dt}_{/0} \vec{V} \right)$$

Variabilité cinématique en module. Si on examine la matrice $K_V^T K_V$ pour évaluer le rapport entre $\|\Omega\|^2$ et $\|\dot{V}\|^2$, on constate qu'il y a toujours une certaine variabilité cinématique en module d'autant plus faible que l'attitude repérée est proche de l'attitude origine :

$$K_A^T K_A \approx 1 + \frac{\alpha^2}{12} \tilde{u}^2$$

$$K_\tau^T K_\tau = (1 + c_\alpha)^2 \mathbf{1} - s_\alpha^2 \tilde{u}^2 \approx 4 \left[\mathbf{1} - \frac{\alpha^2}{2} \left(\mathbf{1} + \frac{1}{2} \tilde{u}^2 \right) \right]$$

$$K_\eta^T K_\eta \approx 4 \left(1 + \frac{\alpha^2}{2} \right) \left[\mathbf{1} + \frac{\alpha^2}{8} \tilde{u}^2 \right]$$

$$K_\sigma^T K_\sigma = 16c_{\alpha/4}^4 \mathbf{1} \approx 16 \left(1 + \frac{\alpha^2}{8} \right) \mathbf{1}$$

Interpolation linéaire. L'interpolation linéaire $\vec{V} = (1 - \lambda) \vec{V}_1 + \lambda \vec{V}_2$ entre les repérages des attitudes \mathcal{B}_1 et \mathcal{B}_2 relativement à l'attitude \mathcal{B}_0 fournit un vecteur \vec{V} qui repère une certaine attitude \mathcal{B}_M relativement à l'attitude \mathcal{B}_0 . Lorsque λ varie entre 0 et 1 \mathcal{B}_M varie de \mathcal{B}_1 à \mathcal{B}_2 . Il n'y a que dans les cas du repérage par $\vec{\tau}$ où le vecteur $\vec{\Omega} = \mathcal{K}_V \left(\frac{d}{dt} \vec{V} \right)$ reste parallèle à une direction fixe pendant une interpolation linéaire. Mais même dans ce cas $\|\Omega\|/\dot{\lambda}$ ne reste pas constant.

Choix d'un de ces 4 systèmes pour définir des trajectoires. Aucun de ces 4 systèmes ne présente toutes les qualités que nous attendons. Le plus intéressant semble être le vecteur $\vec{\tau} = \tan \left(\frac{\alpha}{2} \right) \vec{u}$ qui offre une bonne linéarité, aux petits mouvements, entre Ω et $\frac{d}{dt} \vec{\tau}$, mais qui est singulier quand on s'approche de π .

5.3 Les quaternions

Les quaternions Q sont en premier lieu des éléments d'un espace vectoriel de dimension 4, qu'on scinde en deux sous espaces complémentaires de dimension 1 (le sous-espace de la partie scalaire s) et de dimension 3 (le sous-espace de la partie pure P). On notera ceci sous la forme :

$$Q = s + P$$

On dote cet espace d'une structure d'algèbre en définissant la multiplication interne de deux quaternions $Q_1 = s_1 + P_1$ et $Q_2 = s_2 + P_2$ par $Q = Q_1 Q_2 = s + P$ avec :

$$s = s_1 s_2 - P_1 \cdot P_2 \quad ; \quad P = s_1 P_2 + s_2 P_1 + P_1 \wedge P_2$$

où le symbole “.” est utilisé pour le produit scalaire et le symbole “ \wedge ” pour le produit vectoriel classique dans le sous espace de dimension 3.

La définition du quaternion conjugué $Q^* = s - P$, de la norme $n(Q) = QQ^*$ et du quaternion inverse $Q^{-1} = Q^*/n(Q)$ dote cet espace d'une structure de corps non commutatif appelé le corps des quaternions de Hamilton.

Quaternion et attitude. On peut repérer la base mobile \mathcal{B}_M relativement à la base \mathcal{B}_0 par une infinité de quaternions Q définis par :

$$Q = \rho \left(\cos \frac{\alpha}{2}, \sin \frac{\alpha}{2} \vec{u} \right)$$

avec ρ scalaire quelconque non nul. En général, on s'arrange pour que $\rho = 1$. On verra plus loin, que dans le cas des trajectoires polynomiales cette égalité n'est qu'approchée.

Dérivée de quaternion et vitesse de rotation. Appelons Ω le quaternion pur (partie scalaire nulle) ayant pour partie pure les composantes du vecteur vitesse de rotation instantanée $\vec{\Omega}$. Les relations qui lient les quaternions Ω et \dot{Q} sont les suivantes :

$$\dot{Q} = \frac{1}{2} \Omega Q + \lambda Q \quad ; \quad \frac{1}{2} \Omega = Pur(\dot{Q} Q^{-1})$$

où λ est un scalaire quelconque (une variation de taille du quaternion ne produit aucune vitesse de rotation). Si Q est unitaire, on retrouve les formules classiques $\dot{Q} = \frac{1}{2} \Omega Q$ et $\frac{1}{2} \Omega = \dot{Q} Q^*$.

La norme de la vitesse de rotation est donnée par $\frac{1}{4} \|\Omega\|^2 = \|\dot{Q}\|^2 / \|Q\|^2 - \lambda^2$ qui se réduit à $\frac{1}{2} \|\Omega\| = \|\dot{Q}\|$ lorsque le quaternion reste unitaire.

Distance entre deux attitudes. Considérons deux attitudes figurées par les orientations de deux bases \mathcal{B}_A et \mathcal{B}_B , et une base de référence \mathcal{B}_O . Associons aux opérateurs rotation \mathcal{R}_{OA} et \mathcal{R}_{OB} qui transforment la base \mathcal{B}_O respectivement en base \mathcal{B}_A et \mathcal{B}_B les quaternions unitaires Q_{OA} et Q_{OB} . Le quaternion unitaire :

$$Q_{AB} = Q_{OA}^* Q_{OB}$$

représente l'opérateur rotation qui amène la base \mathcal{B}_A en coïncidence avec la base \mathcal{B}_B , en composantes dans la base \mathcal{B}_A . Si nous notons Θ l'angle de la rotation unique qui amène la base \mathcal{B}_A en coïncidence avec la base \mathcal{B}_B , défini par $Q_{AB} = \cos \frac{\Theta}{2} + \sin \frac{\Theta}{2} U_{AB}$, on montre que :

$$\|Q_{OA} - Q_{OB}\| = 2 \sin \left| \frac{\Theta}{4} \right|$$

Pour des attitudes situées à moins d'un demi-tour l'une de l'autre, la distance euclidienne dans l'espace de dimension 4 des quaternions unitaires fournit une distance entre attitudes qui est indépendante de la base de référence \mathcal{B}_O choisie.

Au delà d'un demi-tour se pose le problème du modulo 2π . Si deux attitudes apparemment identiques mais distantes d'un tour doivent être considérées comme distinctes (existence d'un lien physique tordu, mémorisant le tour), ceci sera réalisé par la distance entre quaternions unitaires avec lesquels on peut distinguer les rotations d'angle α de $2\pi + \alpha$. Cette propriété est limitée au premier tour car on ne peut pas distinguer α de $4\pi + \alpha$. Au contraire, si deux attitudes distantes d'un tour doivent être considérées comme identiques, il faut considérer comme distance le minimum de $\|Q_{OA} - Q_{OB}\|$ et $\|Q_{OA} + Q_{OB}\|$.

Orthodromie en quaternion. Nous appelons orthodromie en quaternion [Llib 92], l'arc de grand cercle sur la sphère S_3 qui joint deux quaternions unitaires. Le quaternion unitaire $Q(\theta)$ défini par :

$$Q(\theta) = \frac{\sin \frac{\Theta - \theta}{2}}{\sin \frac{\Theta}{2}} Q_{OA} + \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\sin \frac{\Theta}{2}} Q_{OB}$$

varie entre les quaternions Q_{OA} et Q_{OB} lorsque θ varie entre 0 et Θ . Le mouvement d'attitude associé à l'évolution de $Q(\theta)$ correspond à une rotation autour de l'axe fixe \vec{u}_{AB} , amenant la base \mathcal{B}_A en coïncidence avec la base \mathcal{B}_B . On peut vérifier que $\Omega = \dot{\theta} U_{AB}$.

Utilisation des quaternions pour définir des trajectoires. Parmi les propriétés qui viennent d'être présentées, celles qui nous ont incitées à préférer les quaternions aux autres systèmes étudiés sont :

- l'absence de singularité de représentation, quelle que soit la distance de l'attitude prise pour référence,
- la régularité et l'homogénéité de la relation entre \dot{Q} et Ω , qui lorsque les quaternions restent au voisinage de la sphère unité, se traduisent par le fait que le rapport entre le module de Ω et la vitesse curviligne sur la trajectoire en quaternion est constant (et égal à 2),
- l'homogénéité de la représentation, en ce sens qu'elle est indépendante de la base choisie comme référence pour les attitudes.

Hypothèse de proximité à S_3 . A titre d'exemple test nous avons calculé la trajectoire polynomiale de degré 5 qui joint deux quaternions unitaires Q_{OA} et Q_{OB} représentant des attitudes situées à une distance en rotation de π en imposant comme contraintes de continuité aux deux bouts, l'égalité des dérivées première et seconde avec l'orthodromie de Q_{OA} à Q_{OB} . La courbe obtenue s'éloigne très peu de l'orthodromie sur l'hypersphère unité. La déviation maximale a lieu à mi-chemin, vers l'intérieur de l'hypersphère unité et vaut $3.2 \cdot 10^{-4}$. Cet exemple test montre l'importance de la continuité à l'ordre 2 imposée aux extrémités. Ce sont ces triples contraintes (position, dérivée première et seconde) aux deux bouts qui empêchent les courbes polynomiales de s'éloigner de la sphère unité.

Expressions des conditions aux limites pour les trajectoires. Dans le cas de trajectoires en quaternion exprimées en fonction du temps, les contraintes en vitesse et accélération de rotation se traduisent en :

$$\dot{Q} = \frac{1}{2} \Omega Q \quad ; \quad \ddot{Q} = \frac{1}{2} \dot{\Omega} Q - \frac{1}{4} \|\Omega\|^2 Q$$

Dans le cas de la dérivée seconde, le second terme représente l'accélération normale à la trajectoire en quaternion. Elle existe même dans le cas d'une rotation à vitesse constante autour d'un axe fixe (accélération centripète sur l'orthodromie).

Dans le cas de courbes paramétriques, associées à une loi de mouvement, on passera par l'intermédiaire de contraintes en vitesse et accélération curvilignes obtenues au moyen des relations suivantes :

$$|\dot{s}| = \frac{1}{2} \|\Omega\| \quad ; \quad \dot{s}^2 + \left(\|Q_s''\|^2 - 1 \right) s^4 = \frac{1}{4} \|\dot{\Omega}\|^2$$

où Q_s'' représente la courbure (dérivée seconde par rapport à l'abscisse curviligne). Sur une orthodromie on a $\|Q_s''\| = 1$ ce qui simplifie la relation précédente en $|\dot{s}| = \frac{1}{2} \|\dot{\Omega}\|$.

6 CONCLUSION

Cet article est consacré à la définition de trajectoires de consignes, continues au deuxième ordre.

La première partie présente un filtre numérique de consignes "primaires" qui génère des consignes secondaires respectant des contraintes en vitesse, accélération et dérivée d'accélération maximales. Si les consignes primaires respectent les contraintes, le filtre numérique se comporte comme un filtre linéaire de fonction transfert unité. Les consignes secondaires suivent sans erreur les consignes primaires. Dans le cas contraire, cas de consignes primaires en marches d'escalier par exemple, les consignes générées suivent au mieux les consignes primaires avec un comportement mixte non-linéaire bang-bang quand les écarts de suivi sont grands et linéaire quand les écarts de suivi redeviennent faibles.

La deuxième partie est consacrée à la définition de courbes multidimensionnelles multi-segments, à partir de points de passage. Deux types de segments de courbe sont envisagés : les arcs de cercle et les polynomiales paramétriques (qui incluent les segments de droite). La nature de certains segments peut être imposée. Les segments libres sont calculés de manière à obtenir une continuité d'ordre 2 sur l'ensemble de la courbe. Ces contraintes imposent l'ajout aux splines cubiques classiques, de raccords utilisant des polynomiales de degré 4 et 5.

La troisième partie est consacrée à la définition de lois de mouvement continues à vitesse, accélération et dérivée d'accélération bornées. Ces lois de mouvement sont utilisées comme loi d'avance paramétrique sur les courbes précédentes. Deux types de lois sont présentées : des lois de mouvement en temps minimum, avec des conditions aux limites quelconques en position, vitesse et accélération, et une loi de mouvement en temps imposé qui est obtenue par une dilatation temporelle de la précédente. En réunissant les méthodes présentées dans ces deux parties, on dispose d'une méthode de définition de trajectoires de consigne multi-dimensionnelles continues en accélération, adaptée à des espaces ponctuels de type euclidien.

Enfin, la quatrième partie est consacrée à l'analyse de différents systèmes de repérage des attitudes et montre l'adéquation des quaternions à la définition de trajectoires de consigne en attitude.

BIBLIOGRAPHIE

[Ahlb 67] J.H. Ahlberg, E.N. Nilson, J.L. Walsh : "The Theory of Splines and Their Applications", *Mathematics in Science and Engineering, Volume 38, Academic Press, Ney York, 1967.*

[Boor 78] C. De Boor : "A Practical Guide to Splines", *Applied Mathematical Sciences, Volume 27, Springer-Verlag, New York, 1978.*

[Llib 82] M. Llibre : "Méthodes de compression de données pour les robots à trajectoires continues", *12TH International Symposium on Industrial Robots, Paris, Juin 1982.*

[Llib 92] M. Llibre : "Génération de trajectoires de consigne d'attitude", *Rapport Dera n°2/7805.00, Onera/Cert Dera, Toulouse, Juin 1992.*

[Llib 93] M. Llibre : "Génération de trajectoires de consigne d'attitude", *Rapport Dera n°2/7852.00, Onera/Cert Dera, Toulouse, Juin 1993.*

[Llib 94] M. Llibre : "Génération de trajectoires de consigne d'attitude", *Rapport Dera n°1/7889.00, Onera/Cert Dera, Toulouse, Février 1994.*

[Tsio 94] P. Tsiotras : "New Control Laws for the Attitude Stabilization of Rigid Bodies", *13TH IFAC Symposium Automatic Control in Aerospace-Aerospace Control '94, Palo Alto, Septembre 1994.*